دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

خلاصه درس مقاومت مصالح

(بر مبنای کتاب سری عمران و گاج)

تهیه و تنظیم : مصطفی رحیمی

E-MAIL: nce.rahimi@yahoo.com

بهار سال ۱۳۹۴

www.CivilFile.com سیویل فایل مرجع فایل های مهندسی عمران

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

مقدمه :

خلاصه ای که پیش روی شماست، خلاصه درس مقاومت مصالح گاج چاپ ۱۳۹۲ و سری عمران چاپ ۱۳۹۲ می باشد. مهندسین عزیز دقت کنید که مبنای خلاصه کتاب گاج بوده است و بعد از خواندن کتاب سری عمران، نکات مهم و اضافی این کتاب نیز به جزوه اضافه شده است.

لازم به ذکر است که این خلاصه برای یادگیری هر چه بیشتر، همراه با شمار کثیری از مثال های متنوع تدوین شده است. دقت شود که بعضا نکات تست های مختلف و آزمون ها نیز در جزوه گنجانده شده است.

امید است که مورد رضایت مهندسین عزیز واقع شود ...

در مورد نحوه ی خواندن درس مقاومت مصالح و توضیح بیشتر در مورد این درس، پی دی افی آماده گردیده که پیشنهاد می شود قبل از مطالعه این درس آن پی دی اف نیز مطالعه شود.

لطفا هرگونه انتقاد و پیشنهاد در مورد این جزوه را از طریق ایمیل **nce.rahimi@yahoo.com** با بنده در میان بگذارید.

به امید موفقیت شما مهندسین عزیز در کنکور کارشناسی ارشد

مصطفی رحیمی

رتبه ۳۴ کنکور کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران سال ۱۳۹۴

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: Mostafa Rahimi

Date: No:

مقاومت مصالح

فصل اول: تنش و کرنش:

تنش برخلاف فشار معمولاً بر روی سطوح داخلی اثر کرده و می‌تواند بر سطح عمود نباشد. در هر نقطه مولفه عمود بر سطح، تنش نرمال و مولفه مماس بر سطح تنش برشی یا مماسی گفته می‌شود.

واحدها:

$$1\ \frac{N}{mm^2} = 10^6\ \frac{N}{m^2} = 1\,MPa \quad , \qquad 1\,psi = \frac{lb}{(in)^2}$$

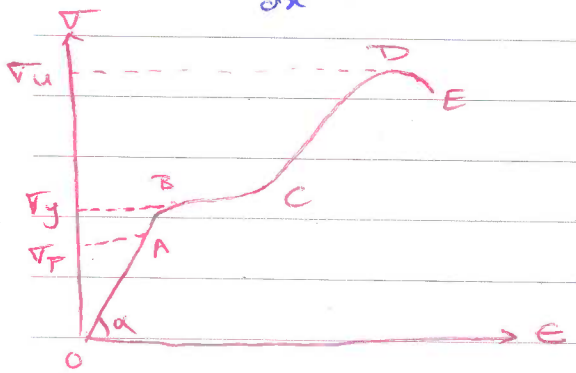
$$1\,MPa = 10\ \frac{kgf}{cm^2}$$

کرنش طولی:

مهندسی $\boxed{\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}}$ $\xrightarrow{\text{کرنش واقعی (لحظه‌ای)}}$ $\epsilon_t = \int_{L_0}^{L} \frac{dL}{L} = \ln\frac{L}{L_0}$

مشتق تغییر مکان در راستای x با کرنش طولی در راستای x در همان نقطه برابر است.

$$\epsilon_x = \frac{d\delta_x}{dx} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{d\delta_y}{dy}$$



آزمایش کشش مستقیم فولاد:

$$\sigma = \epsilon . E \quad , \quad E = tg\alpha$$

ناحیه AB: در این ناحیه فولاد تنش کرنش خطی نبوده ولی ماده خاصیت الاستیک دارد یعنی در صورت برداشتن جاگذاری از روی سازه، تغییر شکل بماند صفر است (حد تسلیم = σ_y)

ناحیه (D): در این ناحیه فولاد مجدداً از خود مقاومت نشان داده و برای افزایش کرنش باید تنش را افزایش دهیم. به این ناحیه‌ی سخت شدگی مجدد گفته می‌شود. در انتهای این ناحیه فولاد بیشترین تنش وارده را تحمل می‌کند.

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: / / No:

ناحیه DE: در این ناحیه سطح مقطع نمونه شروع به کاهش کرده و در آن پدیده‌ی باریک شدگی رخ می‌دهد. این نمونه‌ی فولادی در نهایت در نقطه E گسیخته می‌شود.

نکته: مصالح نرم در برش دچار ضعف بوده و در صفحاتی که تنش برشی در آن‌ها بیشینه است گسیخته می‌شوند. مصالح ترد در کشش دچار ضعف بوده و گسیختگی در صفحاتی عمود بر راستای صفحات با تنش نرمال max رخ می‌دهد. بنابراین ماده در صفحاتی عمود بر محور میله دچار شکست می‌شود.

اریب‌واشونت:

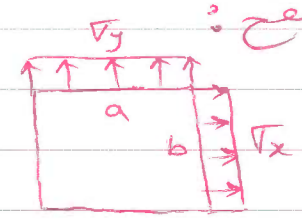
$$\nu = \left| \frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} \right| = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$$

قانون عمومی هوک:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} + \dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

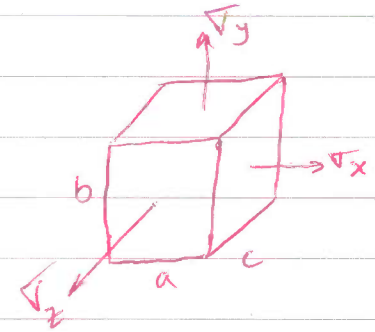
← به علامت‌های مثبت در تنش‌ها توجه شود

کرنش سطح:



$$\epsilon_A = \frac{\Delta A}{A} = \frac{b.\Delta a + a.\Delta b}{ab} = \boxed{\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}}$$

$$\epsilon_A = \epsilon_x + \epsilon_y$$



کرنش حجمی:

$$\epsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{bc.\Delta a + ac.\Delta b + ab.\Delta c}{abc} = \boxed{\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}}$$

$$\epsilon_V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

فرمول راحت تر و کاربردی تر کرنش حجمی :

$$\epsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \xrightarrow[\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=-P]{\text{هیدرواستاتیک}} \epsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(-3P)$$

مدول الاستیسیته حجمی یا مدول بالک

$$\frac{E}{3(1-2\nu)} = k \Rightarrow \epsilon_v = -\frac{P}{k}$$

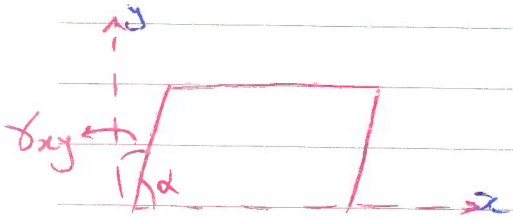
* ضریب پواسون لزوماً عددی مثبت است

$0 < \nu < 0.5$

مصالح غیرقابل تراکم $\longrightarrow \nu = 1/2$

مصالح با تراکم پذیری بالا $\longrightarrow \nu = 0$

کرنش های برشی :



$\gamma_{xy} = \pi/2 - \alpha$ میزان تغییر زاویه ایجاد شده پس از تغییر شکل

$$\tau = G\gamma \quad , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

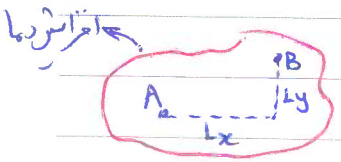
نکته بسیار مهم :

تنش های برشی در یک المان تغییر حجم ایجاد نمی کنند و فقط تنش های نرمال (σ_x و ...) حجم ایجاد می کنند.

همچنین تنش های برشی تغییر سطح و تغییر طول ایجاد نمی کنند.

اگر σ نداشته باشیم $\longrightarrow \epsilon_v = 0$

کرنش های حرارتی :



$$\Delta L_x = L_x \alpha \Delta T \quad , \quad \Delta L_y = L_y \alpha \Delta T$$

$$\epsilon_T = \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L_y}{L_y} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) + 3\alpha\Delta T$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

روابط در حالت

تنش مسطح: اگر در یک المان تنش‌های برشی و قائم وارد بر یکی از وجه‌های المان برابر صفر باشد. مثلاً اگر تنش در صفحه‌ی zx صفر باشد در صفحه‌ی xy حالت تنش مسطح داریم.

کرنش مسطح: اگر در یک المان از کرنش در یکی از راستاها جلوگیری شده باشد و یا کرنش در آن راستا ناچیز باشد. مثلاً در سد خاکی می‌توان از کرنش طولی سازه صرف نظر کرد.

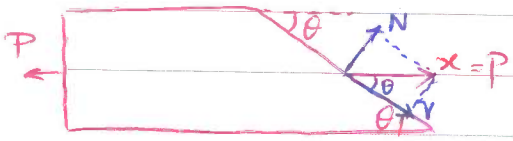
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

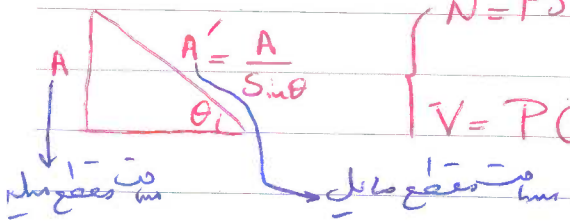
Subject:

Date: . . No:

فصل دوم: تبدیل تنش کرنش:

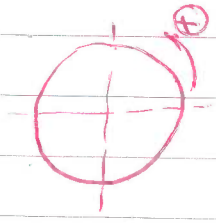


اگر میله مستطیلی که تحت کشش است را مقطع مثل روبرو بزنیم:



$$\begin{cases} N = P\sin\theta \\ V = P\cos\theta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma = \dfrac{N}{A'} = \boxed{\dfrac{P}{A}\sin^2\theta} \\ \tau_{ave} = \dfrac{V}{A'} = \dfrac{P}{A}\sin\theta\cos\theta = \boxed{\dfrac{P}{2A}\sin 2\theta} \end{cases}$$

قرارداد:



$$\begin{cases} \text{کششی} \longrightarrow \sigma_y > 0 \\ \text{فشاری} \longrightarrow \sigma < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{در جهت ساعتگرد} \longrightarrow \tau > 0 \\ \text{خلاف جهت ساعتگرد} \longrightarrow \tau < 0 \end{cases}$$

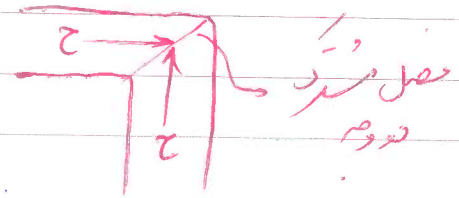
$$\theta = \pi/2 \begin{cases} \longrightarrow \sigma = \sigma_{max} = \dfrac{P}{A} \\ \longrightarrow \tau = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{با توجه به بزرگول}$$

$$\theta = \pi/4 \begin{cases} \longrightarrow \sigma = \dots \\ \longrightarrow \tau = \tau_{max} = \dfrac{P}{2A} \end{cases}$$

قانون کوشی:

تنش های برشی موثر بر دو وجه عمود بر هم که عمود بر فصل مشترک دو وجه اثر می کنند ← برابر هستند و همواره به هم نزدیک یا از هم دور می شوند.

یعنی در صفحات عمود بر هم واقع در یک المان، تنش های برشی هم اندازه اند.



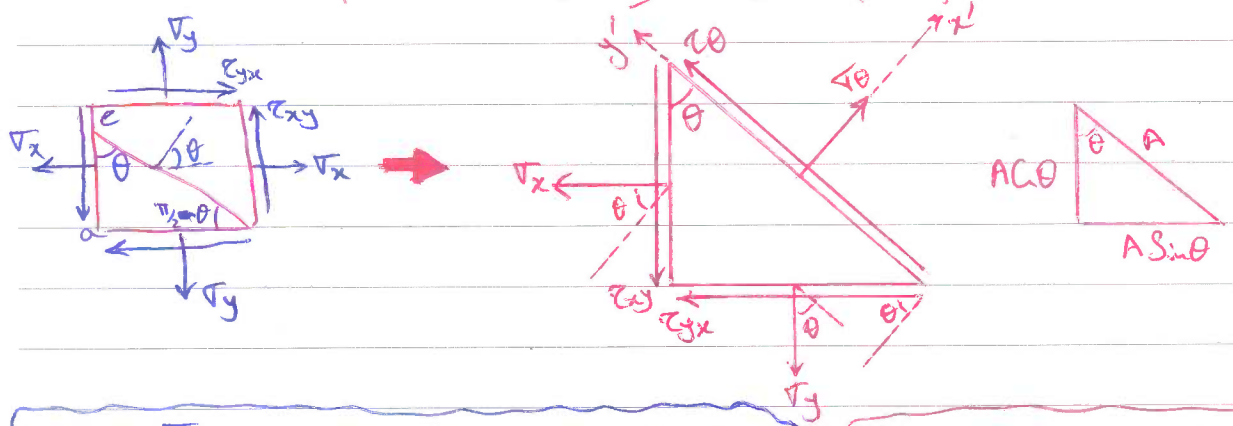
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

محاسبه‌ی تنش‌های قائم و برشی بر روی یک صفحه مایل (روش فرمول) :



$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_\theta = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

در سری عمران

** منفی فراموش نشود

درست

نکته بسیار مهم :

θ زاویه بین نرمال صفحه بریده شده با محور x هاست. اگر در جهت مثلثاتی از محور x ها حرکت کنیم و به بردار نرمال صفحه برسیم، $\theta > 0$ وگرنه $\theta < 0$

صفحات اصلی :

برصفحاتی اصلی گویند که ← $\sigma = \sigma_{min}$ یا σ_{max} ، $\tau = 0$

از τ_θ مشتق می‌گیریم

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

دو جواب دارد ← $\theta_{p2} - \theta_{p1} = 90$ ← صفحات اصلی بر هم عمودند

زاویه‌ی نرمال صفحه اصلی با محور x ها ← θ_p

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

فرمول اصلی :

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

نکته بسیار مهم : جمع تنش های قائم بر روی دو صفحه دلخواه عمود بر هم ← همواره ثابت

$$\sigma_x+\sigma_y=\sigma_{max}+\sigma_{min}$$

تنش برشی ماکزیمم :

$$tg\,2\theta_s = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

2θ مشتق داریم

یک θ_s ساعتگرد و یک θ_s پادساعتگرد بدست می آید

θ_s : زاویه نرمال صفحه برش ماکزیمم با محور x ها

$\theta_{s_2}-\theta_{s_1}=90$ صفحات تنش برشی max بر هم عمودند

برای بدست آوردن برش ماکزیمم فرمول مربع :

$$\tau_{\substack{max\\min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

در کل $\longrightarrow$ $\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \tau_{max}$ $\longrightarrow$ $\tau_{max} = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}$

انرژی ذخیره شده در المان :

$$E = \frac{1}{2}\left[\sigma_x\epsilon_x+\sigma_y\epsilon_y+\tau_{xy}\gamma\right] = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\nu\sigma_x\sigma_y\right]+\frac{1}{2G}\tau^2$$

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)}$$

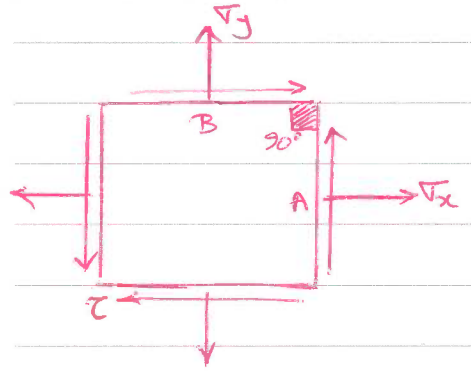
PENIX NOTE BOOK

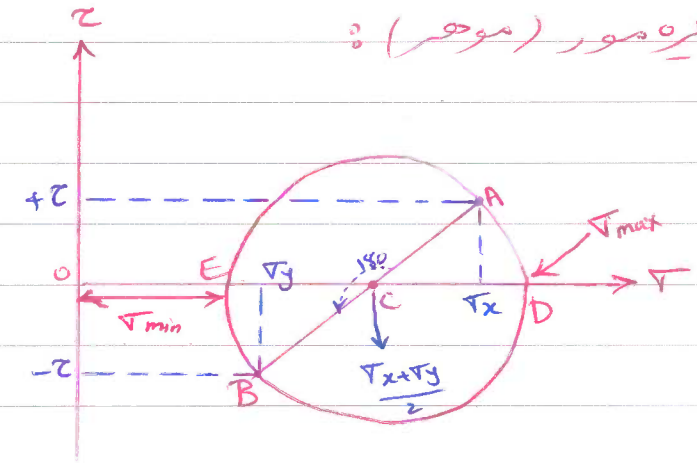
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

دایره مور (موهر):





معادله دایره: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \rightsquigarrow \alpha=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, $\beta=0$

$$\boxed{R=\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}}$$

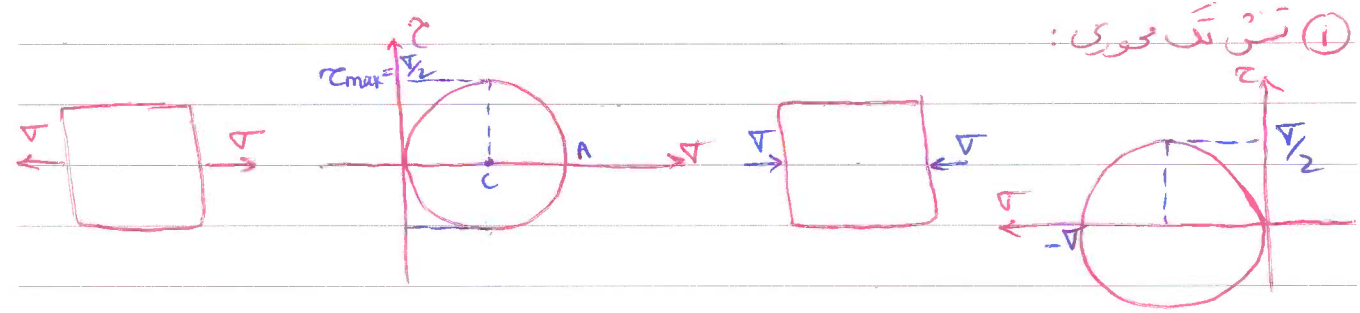
نکته بسیار مهم: اگر بر روی المان به اندازه θ در جهت مثلثاتی دوران کنیم تا نقطه دیگر ← در دایره مور به اندازه 2θ و در خلاف جهت مثلثاتی باید دوران کنیم. (مدرس عمران فرق می‌کند)

$\sigma_{max}=$ مرکز دایره $+R$

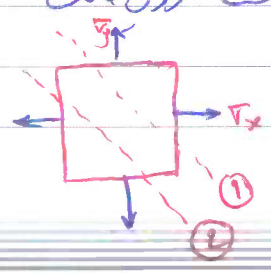
$\sigma_{min}=$ مرکز دایره $-R$

بررسی حالت خاص:

① تنش تک محوری:



در این حالت ← $\sigma_{max}=\sigma$, $\sigma_{min}=0$, $\tau_{max}=R=\sigma/2$



نکته: اگر در المان دو صفحه موازی داشته باشیم مقادیر تنش نرمال و تنش برشی این دو صفحه با هم برابرند.

اگر دو صفحه عمود بر هم باشند مجموع تنش‌های نرمال $\sigma_1=\sigma_2$, $\tau_1=\tau_2$

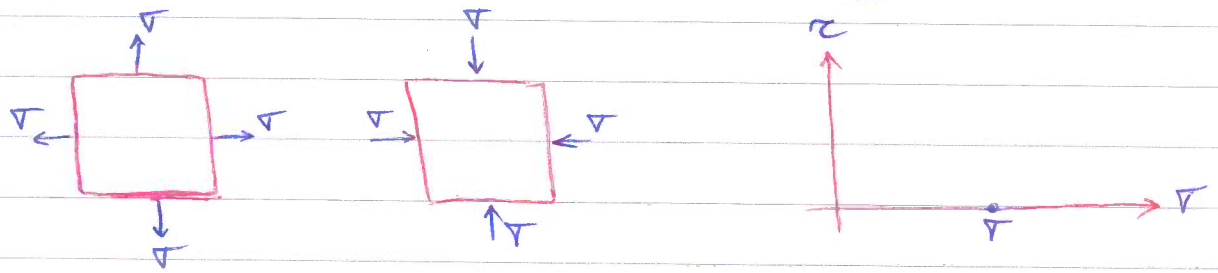
برابر مجموع تنش‌های اصلی است.

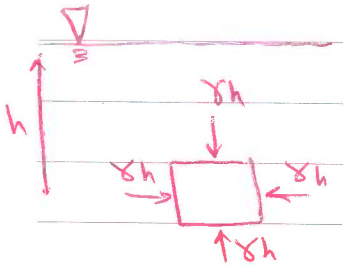
PONIX Note Book
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

② تنش های اصلی هم اندازه و هم نوع ← تبدیل دایره مور به یک نقطه





در این حالت ← $\boxed{\tau = 0}$ و $\sigma = \sigma$

این حالت وقتی به وجود می آید که المان یک جسم در سیال باشد.

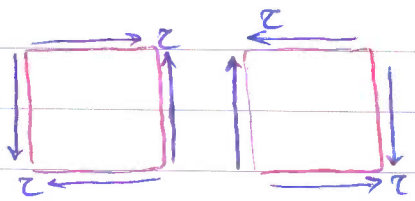
$P = \gamma h$

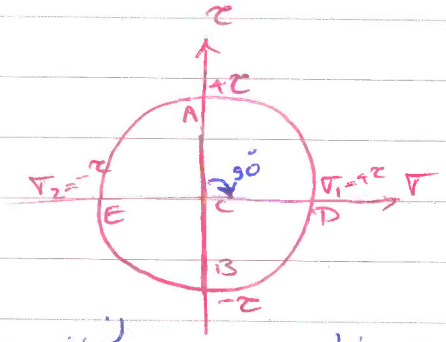
③ برش خالص:

شرط برش خالص

↓

مجموع تنش های نرمال = ۰

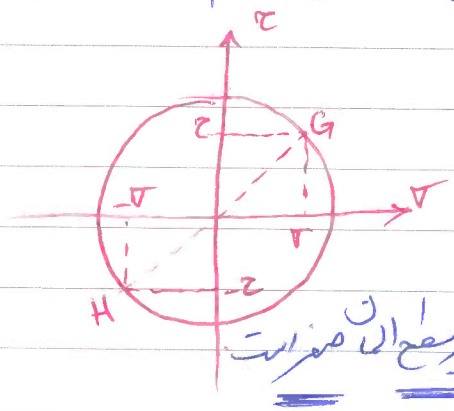


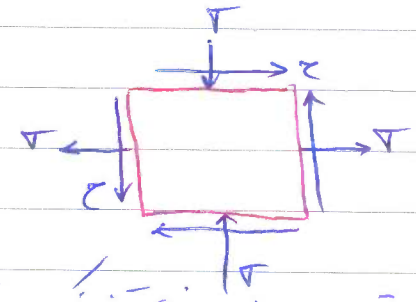


دایره مور به مبدا مختصات منطبق است. المان با زاویه ۴۵° دوران داده می شود.

تنش های اصلی ← $\sigma = \pm\tau$

* در این حالت اگر المان تحت برش خالص α درجه دوران کند، با توجه به تقارن دایره نسبت به مبدا، جمع تنش های قائم در حالت جدید لزوماً صفر است. باید دقت شود در این حالت تنش های قائم مساوی و مختلف العلامه می باشند





در المانی که تحت برش خالص قرار دارد، طول اضلاع تغییر نکرده و تغییر سطح المان صفر است.

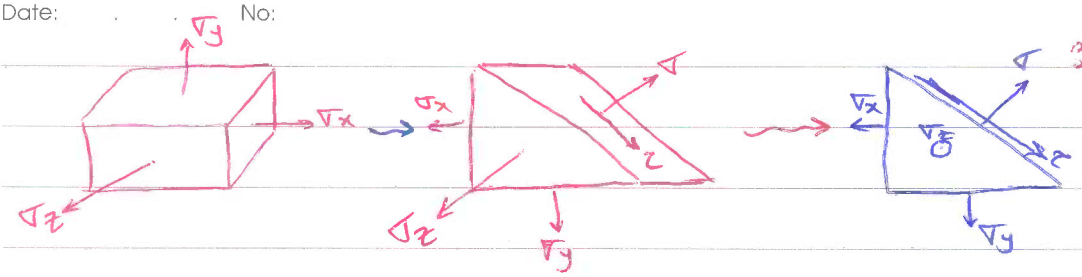
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

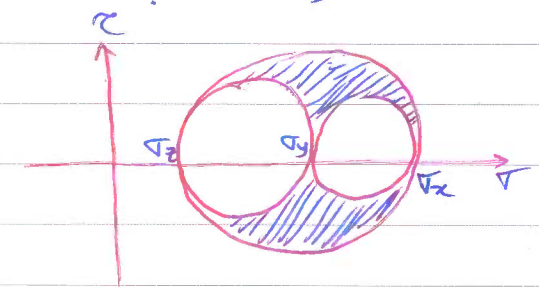
Subject:

Date: . . No:

تنش سه بعدی :



الان سه بعدی رو برو را باید صفحه موازی صفحه τ برش می زنیم ← به دو بعدی تبدیل می شود.
این کار را در جهت های x و y نیز انجام می دهیم ← ۳ تا دایره مور بهمون می ده
وقتی این دایره ها را روی هم برهم نهی کنیم

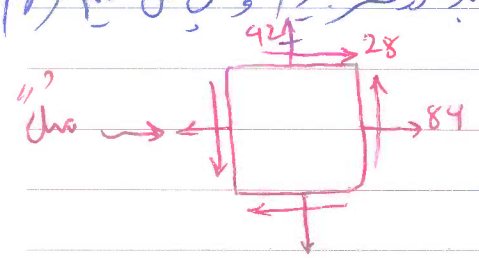


تنش ایجاد شده ← تنها در ناحیه هاشور خورده

تنش برشی ماکزیمم در این حالت :

$$\tau_{max} = \max \begin{cases} \left|\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right| \\ \left|\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right| \\ \left|\dfrac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right| \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{|\text{کوچکترین تنش اصلی} - \text{بزرگترین تنش اصلی}|}{2}}$$

* در حالت سه بعدی τ_{max} برابر شعاع بزرگترین دایره ی مور در بین سه دایره ی رسم شده می باشد.
* اگر راستای عمود بر یکی از صفحات المان، اصلی باشد، در آن صفحه برای بدست آوردن تنش های اصلی می توان از روابط تبدیل تنش دو بعدی استفاده کرد.
* اگر سوال از ما تنش برشی ماکزیمم واقعی را خواست باید المان را سه بعدی در نظر بگیریم و سپس حل کنیم (مهم)



در حالت دو بعد ← $\sigma_{1,2} = \frac{84+42}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{84-42}{2}\right)^2 + 28^2}$

$\Rightarrow \sigma_1 = 98 \ , \ \sigma_2 = 28 \longrightarrow \boxed{\tau_{max} = 35}$ غلط است

در حالت سه بعد ← $\sigma_1 = 98 \ , \ \sigma_2 = 28 \ , \ \sigma_3 = 0 \Longrightarrow$

$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{98}{2} = \boxed{49}$ ✓

PENIX Note Book
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: Mostafa Rahimi

Date: . . No:

تانسور تنش:

متقارن است

$$T = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\det(T) = \sigma_1 \times \sigma_2 \times \sigma_3$$

$$tr(T) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

Trace

برای آنکه تغییر حجم یک المان تحت تأثیر دو تانسور تنش مساوی باشد باید مجموع تنش های روی قطر اصلی یا همون (Trace) برای آن ها برابر باشد. در حالت کلی نسبت تغییر حجم یک المان در اثر دو تانسور تنش برابر نسبت مجموع عناصر روی قطر اصلی آن دو تانسور می باشد.

$$\text{تنش برشی max} = \frac{|\text{تنش اصلی max} - \text{تنش اصلی min}|}{2}$$

$$|[T] - \lambda[I]| = 0 \Rightarrow \lambda = \text{تنش های اصلی}$$

یعنی مثلاً اگر صورت سؤال T رو داد، تنش های اصلی را این طوری بدست می آریم!!!

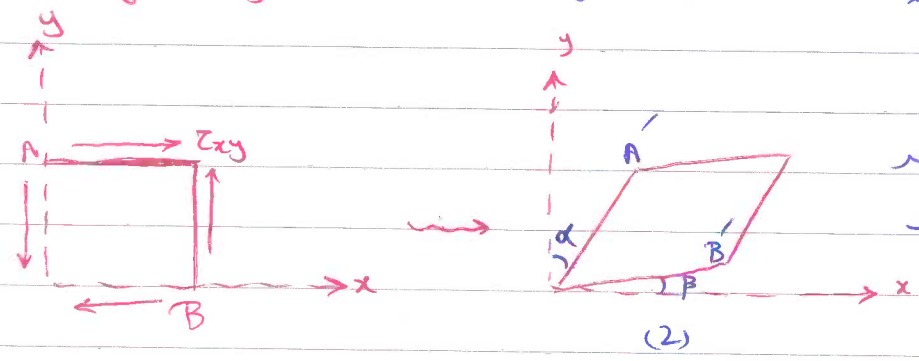
نکته: اگر یک المان دو بعدی را α درجه دوران دهیم، تانسور تنش در حالت جدید در ایه های متفاوتی نسبت به حالت اول دارد ولی دترمینان و trace آن با تانسور تنش در حالت اول یکسان است.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} \end{bmatrix}$$

در حالت دو بعدی $\rightarrow$ $\boxed{\text{دترمینان} = \sigma_{max} \times \sigma_{min}}$

مهم

برش دو بعدی



(2)

اگر تحت تنش برشی دو بعدی باشد به شکل ج در می آید در این حالت

$$\boxed{\gamma_{xy} = \alpha + \beta}$$

اگر تغییر حجم نداشته باشیم $\longrightarrow$ $\boxed{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = tr(T) = 0}$

PONIX NOTE BOOK

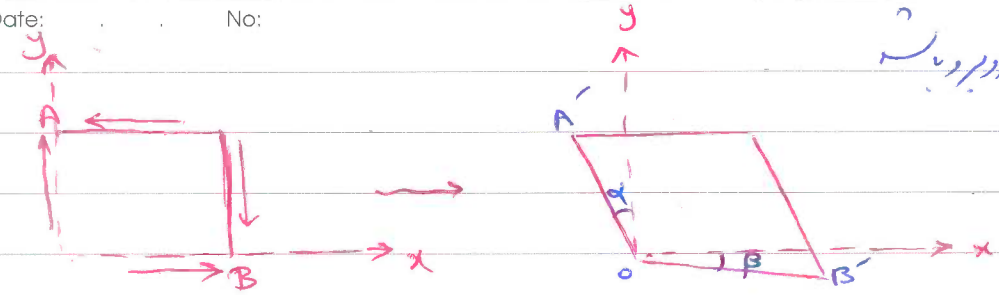
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

اگر تحت تنش برشی مثل روبرو باشد مثل شکل 2 در می‌آید

در این حالت داریم:



(2)

$$\boxed{\gamma_{xy} = -(\alpha+\beta)}$$

** در تبدیلات تنش کرنش مانند جدول روبرو مقادیر را جایگزین می‌کنیم.

تبدیلات تنش	تبدیلات کرنش
σ_x	ϵ_x
σ_y	ϵ_y
τ_{xy}	$W_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$

بر این اساس تمامی روابط قبل که خواندیم مثل روابط σ_θ و τ_θ و دایره مور و ... همه به صورت جدول بالا تغییر می‌کنند.

$$\epsilon_\theta = \frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\cos 2\theta + W_{xy}\sin 2\theta$$

$$W_\theta = -\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{2}\sin 2\theta + W_{xy}\cos 2\theta$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x-\epsilon_y}$$

مهم ← جمع کرنش در دو امتداد عمود بر هم مقداری ثابت است ←

$$\epsilon_x+\epsilon_y = \epsilon_{x'}+\epsilon_{y'} = \epsilon_{max}+\epsilon_{min}$$

$$\epsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E} - \nu\frac{\sigma_{min}}{E}, \quad \epsilon_{min} = \frac{\sigma_{min}}{E} - \nu\frac{\sigma_{max}}{E}$$

در صورتی که کرنش های اصلی اتفاق می‌افتد، کرنش برشی صفر است.

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: . . No:

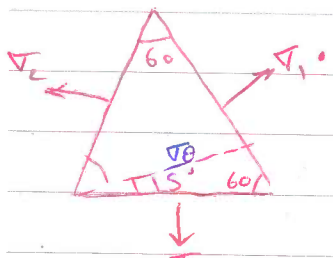
نکته: تعادل المان‌ها:

* در المان‌های مربعی و مستطیلی که وجوه المان بر هم عمودند، برای برقراری تعادل، بایستی تنش‌های برشی با یکدیگر برابر باشند ولی نیازی نیست که تنش‌های نرمال با یکدیگر برابر باشند.
* در المان‌های غیر مربعی و غیر مستطیلی در صورت برابری تنش‌های برشی، تنش‌های نرمال نیز باید با یکدیگر برابر باشند تا تعادل برقرار شود.

تذکر: اگر المان غیر مربعی یا غیر مستطیلی بود و نه تنش‌های نرمال و نه تنش‌های برشی برابر نباشند، باز هم تعادل امکان‌پذیر است.

نکته بسیار مهم:

در صورتی که در المانی یکی از صفحه‌های اصلی وجود داشته باشد، المان در شرایط هیدروستاتیک است و تنش نرمال در تمام صفحات آن یکسان بوده و تنش برشی در تمام صفحات صفر است.



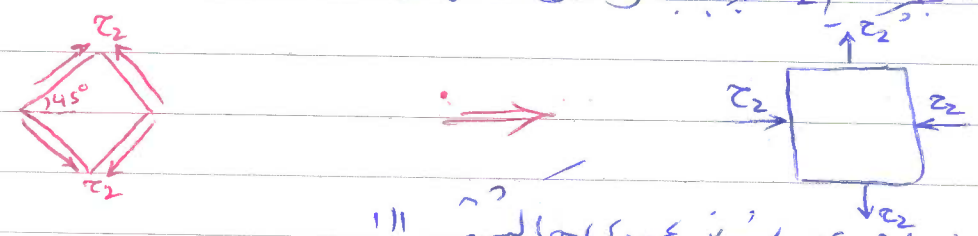
$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ ، $\sigma_\theta = \sigma$

چون صفحه اصلی اند $\rightarrow$ $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_\theta = 0$

در المان مربعی شکل تنها در حالتی برش خالص رخ می‌دهد که تنش‌های قائم هم اندازه و قرینه باشند.

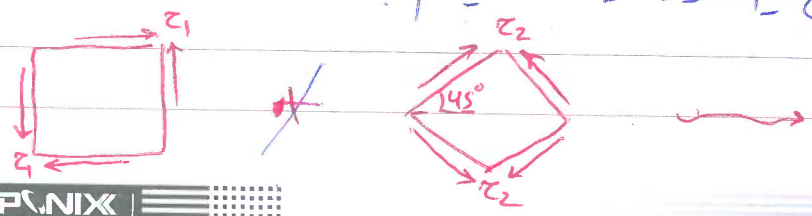
نکته بسیار مهم:

وقتی المان زیر را 45° بچرخانیم τ_2 تبدیل به تنش اصلی المان می‌شود:



دقت شود افقی‌ها قائم می‌شوند عمودی‌ها افقی!!!

نکته: وقتی دو تا المان را می‌خواهیم با هم جمع کنیم باید وضعیتشون عین هم باشد



نمی‌توان با هم جمع کرد

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

نکته واقعاً مهم!!

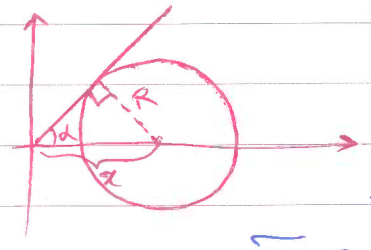
جمع دو المان برش خالص ← المان برش خالص بهمون می‌ده !!

نکته: اگر در سؤال گفته بود که کرنش صفحه‌ای داریم ← یعنی کرنش سطح داریم ← $\boxed{\epsilon_z = 0}$

اگر در سؤال گفته بود لبه‌ی آزاد هست ← حتماً یکی از تنش‌های اصلی صفر است

اگر در سؤال گفته بود مصالح تراکم ناپذیر است ← پواسون $\nu = 1/2$

نکته واقعاً مهم: اگر در سؤال حداکثر نسبت تنش برشی به تنش نرمال را ازمون خواست حتماً باید از دایره مور ببریم و یک مماس روی دایره مور رسم کنیم از مبدا. بعد تا نزاشت مماس می‌شه جواب مسئله مون !!

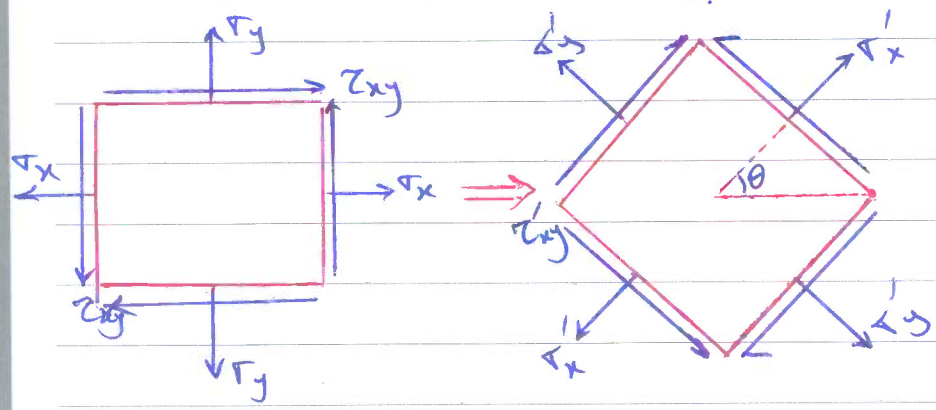


$$\boxed{tg\alpha \overset{\sin\theta}{\Rightarrow} \frac{R}{x} = \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)_{max}}$$

یعنی ابتدا α رو حساب می‌کنیم سپس $tg\alpha$ جواب مسئله است

دقت شود که $\sin\theta = \frac{R}{x}$ و $tg\theta = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$ ← بدست می‌آید.

نکته آزمون: اگر یک جسم θ درجه دوران کند رابطه بین تنش‌های نرمال و برشی قبل و بعد دوران به صورت زیر است:



$$\boxed{\sigma'_x = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta}$$

PENIX NOTE BOOK

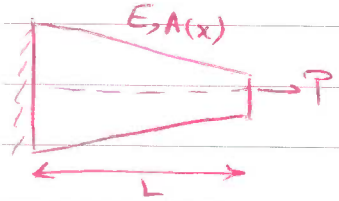
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

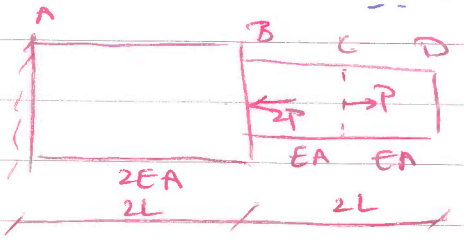
فصل سوم: نیروی محوری در اعضاء

$$\boxed{\Delta L = \frac{PL}{EA}}$$



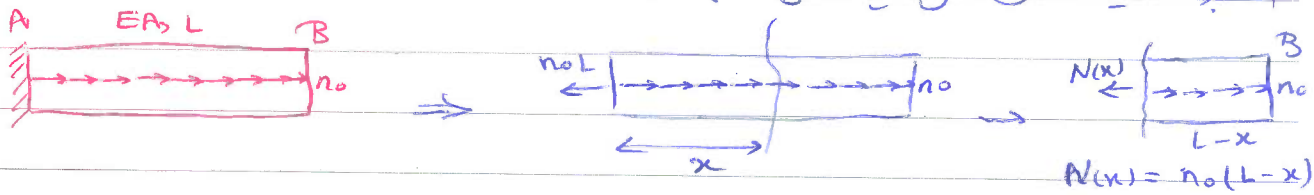
$$\boxed{\Delta L = \int_0^L \frac{P\,dx}{A(x)E}}$$

* نیروی هر قسمت رو خواستیم، از اونجا برش میدیم و تعادل رایی نویسیم.



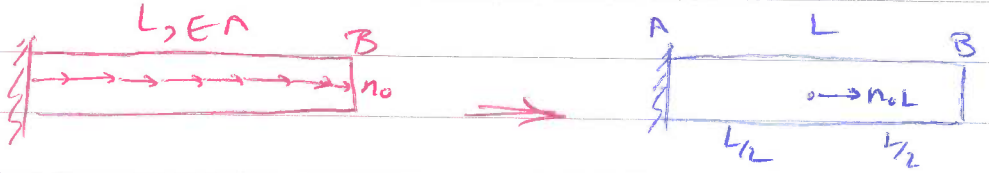
$\rightarrow F_{AB} = -P \qquad F_{BC} = P \qquad F_{CD} = 0$

* ابتدا همیشه عکس العمل تکیه گاهی محاسبه شود:



$N(x) = n_0(L-x)$

نکته: برای سهولت کردن تغییرات انتهایی یا EA ثابت، می توان کل بار گسترده خارجی را در مرکز ثقل قرار داد.



$$\Delta_B = \frac{n_0 L \times L/2}{EA}$$

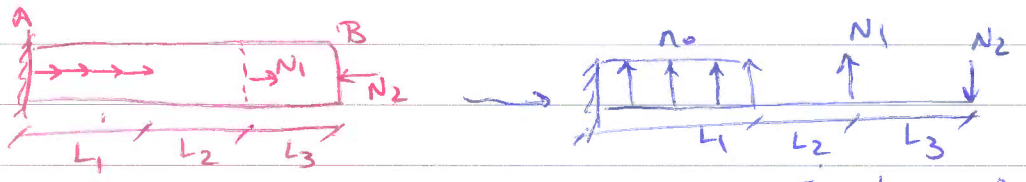
PONIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

نکته مهم: برای بدست آوردن تغییر مکان نقاط مختلف با EA ثابت تحت بارگذاری توأم مفرد و گسترده می‌توان آن را تحت بارگذاری قائم قرار داد.

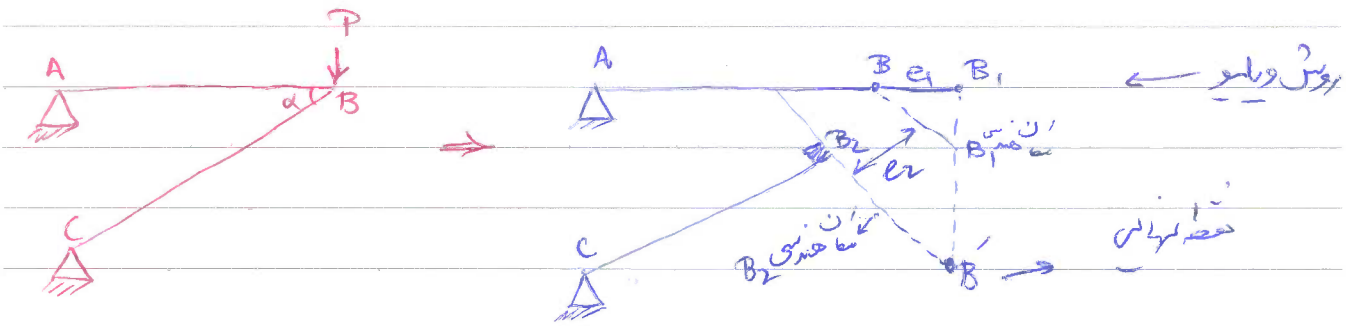


* در این حالت نیروها برشی در مقاطع مختلف با نیروی محوری در سازه اصلی هم مقدار است.
* اگر گشتاور نیروهای وارده حول تکیه‌گاه A را بدست آوریم و بر EA تقسیم کنیم تغییر مکان داریم:

$$\boxed{\Delta_B = \frac{\sum M_A}{EA}}$$

فرضیه تغییر مکان‌های کوچک:

مثلاً در شکل زیر تغییر مکان‌های نقطه B به صورت زیر است.



PENIX NOTE BOOK
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

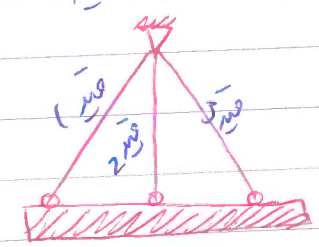
Subject:
Date: No:

نکته مهم: می‌توان میله را با حفظ امتداد، بدون این که تغییر مکان تغییر کند ← مقدار آن ثابت بماند ولی علامت نیرو تغییر کند (نیروی عضو در یک علامت منفی ضرب می‌شود)

نکته واقعا مهم: تغییر مکان، مقدار، جنس، شکل

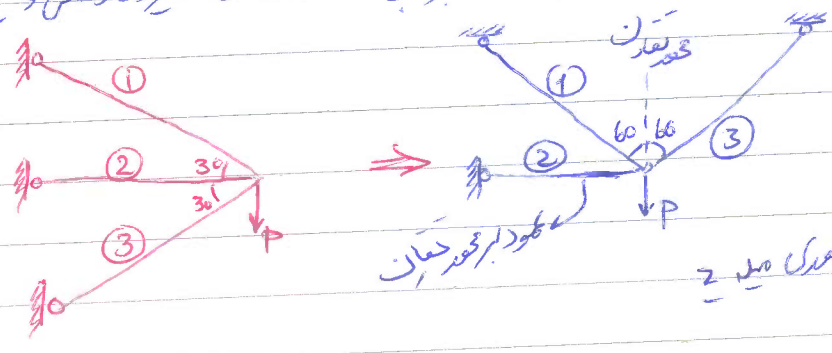
- در معین ← نیروی داخلی ایجاد نمی‌کند
- در نامعین ← نیروی داخلی ایجاد می‌کند

* برای پایداری باید حداقل سه میله غیر موازی و غیر متقارب داشته باشیم:



← ناپایدار

نکته مهم: اگر در یک مجموعه متقارن میله‌ای عمود بر محور تقارن بر مجموعه اضافه شود، نیروی داخلی و تغییر طول آن صفر است.



$F_2 = 0$

نیروی محوری میله 2

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

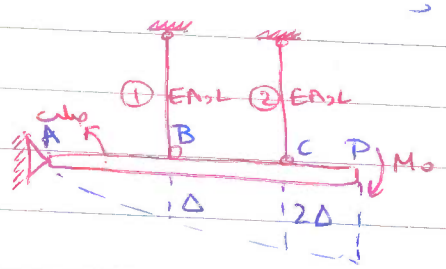
Date: . . No:

سازه های نامعین :

به دو روش این سازه ها را می توانیم حل کنیم.

① روش سختی : Δ را مجهول فرض می کنیم. نیروهای میله ها را برحسب Δ محاسبه می کنیم

بعد با استفاده از معادلات تغییر مکان Δ را بدست می آوریم. سپس F (نیروی میله ها) را بدست می آوریم



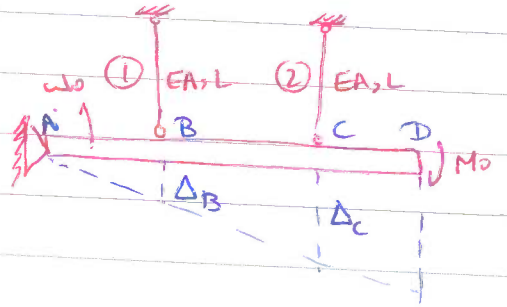
$$F_1 = \frac{EA}{L}\Delta \ , \ F_2 = 2\frac{EA}{L}\Delta$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_1 L + F_2 \times 2L = M_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{M_0}{5EA}} \Rightarrow F_1 , F_2 = \dots$$

② روش نیرو : نیروی یکی از میله ها را F فرض کرده و بقیه ی نیروها را برحسب آن بدست می آوریم

حال از معادله ی سازگاری نیروی F را بدست می آوریم



$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F \times L + F_2 \times 2L = M_0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{M_0}{2L} - \frac{F}{2}}$$

$$\Delta_C = 2\Delta_B$$

$$\Rightarrow \frac{F_2 L}{EA} = 2\frac{F_1 L}{EA} \Rightarrow F = \frac{M_0}{5L} \Rightarrow F_2 = \dots$$

درجه آزادی یک سازه :

تعداد تغییر مکان های مستقل یک سازه که تغییر مکان سایر نقاط سازه را بر اساس آن نوشت

اگر سازه ی نامعین داشتیم

درجه آزادی < درجه نامعینی ← روش سختی از نیرو مناسب تر

درجه نامعینی < درجه آزادی ← روش نیرو از سختی مناسب تر

در سازه ی یک درجه نامعین ← روش نیرو بهتر است.

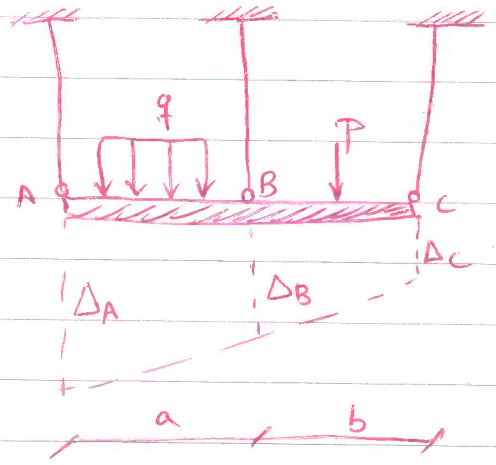
PONIX NOTE BOOK

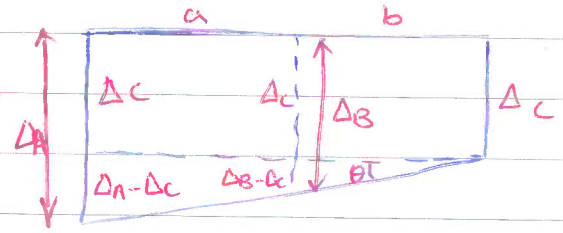
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

مثال خوب :

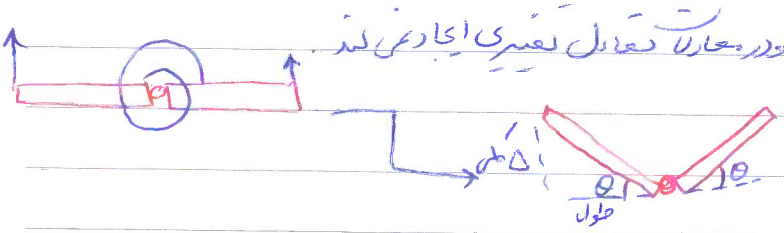




$$tg\theta = \frac{\Delta_B-\Delta_C}{b} \quad , \quad tg\theta = \frac{\Delta_A-\Delta_C}{a+b}$$

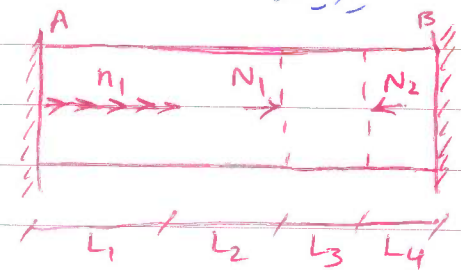
$$\Rightarrow \boxed{\Delta_B = \frac{b\Delta_A + a\Delta_C}{a+b}}$$

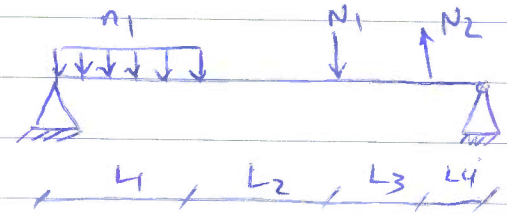
** لنگر فنرهای پیچشی جزء نیروهای داخلی بوده و در معادلات تعادل تغییری ایجاد نمی کند.



$$\theta = \frac{M_{فنر}}{K} = \frac{\Delta_{کل}}{طول}$$

نکته: یک میله‌ی منشوری با EA ثابت تحت بارگذاری گسترده و متمرکز ← می‌توان برای بدست آوردن عکس‌العمل تکیه‌گاهی ← آن را با یک تیر دو سر مفصل جایگزین کرد.





لذا:

عکس‌العمل تکیه‌گاهی تیر = عکس‌العمل سازه اصلی

نمودار برش تیر = نمودار نیروی محوری سازه اصلی

$$\frac{\text{لنگر خمشی}}{EA} = \text{تغییر مکان هر نقطه}$$

PENIX NOTE BOOK

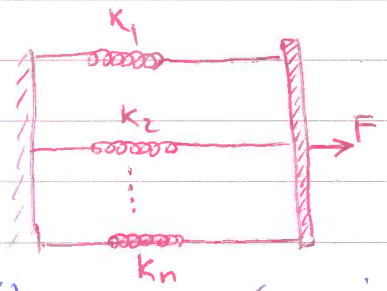
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

مدلسازی سازه‌ها با فنرها :

فنرهای موازی :



$$F_i = \frac{k_i}{\sum k_i} F$$

$$k_e = \sum_{i=1}^{n} k_i \quad , \quad \Delta = \frac{F}{k_e} = \frac{F}{\sum k_i}$$

در حالت موازی Δ فنرها با هم برابر است . البته این رابطه تا زمانی صادق است که نیروی F باعث تسلیم نشود

فنرهای موازی حالت دیگر :

در تشخیص نوع اتصال باید به جای شکل اتصال، عملکرد آن را بررسی کنیم.

مثلاً در شکل روبرو فنرها متوالی بسته نشده اند بلکه موازی هستند چون Δ در دو فنر برابر است.

$$k_e = k_1 + k_2 \quad , \quad F_1 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} P$$

فنرهای متوالی (سری) :

نیروی هر یک از فنرها یکسان

تغییر طول آن ها غیر یکسان

$$P = P_1 = P_2 = P_3$$

$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots \quad , \quad F_e = F_1 + F_2 + \cdots$$

$$\Delta_i = \frac{F_i}{\sum F_i} \Delta_{کل}$$

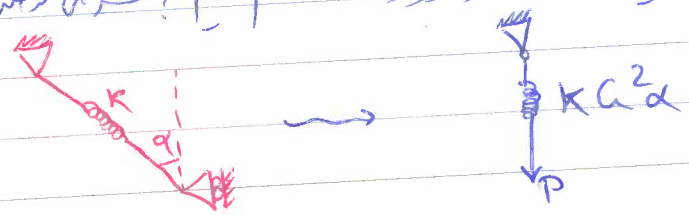
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

نکته مهم: اعضای مایل:

وقتی اعضای مایل را با فنر مایل جایگزین می‌کنیم می‌توان فنر را در راستای قائم گذاشت به شرطی که ضریب سختی فنر در $\cos^2\alpha$ ضرب شود:



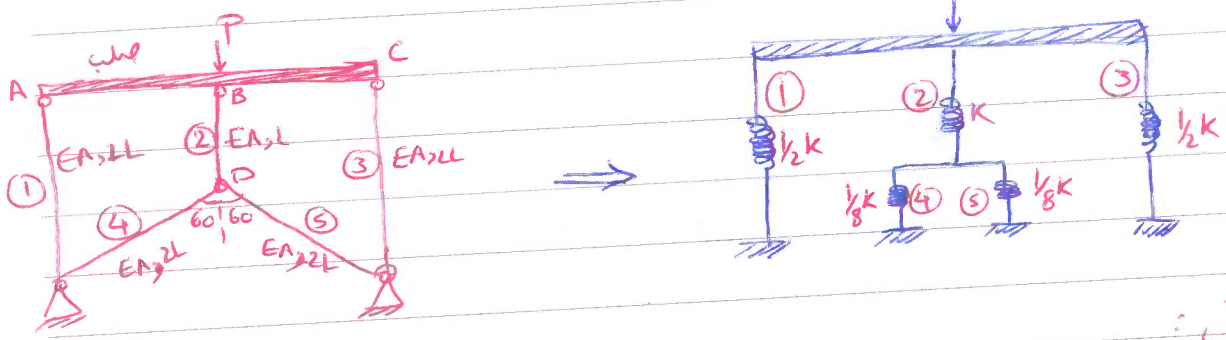
α: زاویه بین راستای نیرو و جابجایی

دقت: باید دقت کرد که وقتی فنر را در راستای قائم تبدیل کردیم در آخر بعد از پیدا کردن نیروی محوری در راستای قائم، باید آن را به $\cos\alpha$ تقسیم کنیم تا نیروی عضو مایل به دست آید.

$$F_{\text{مایل}} = \frac{F_{\text{قائم}}}{\cos\alpha}$$

از معادلات تعادل به دست می‌آید

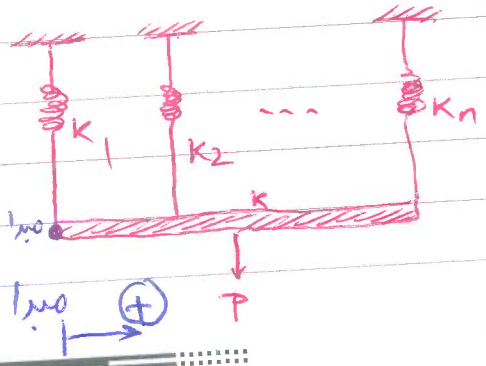
مثال خوب برای فنرها:



مرکز سختی:

محلی است که اگر نیروی قائم در آن بر سازه اثر کند، قطعه صلب دوران نداشته و تغییر مکان مجموعه در راستای آن نیرو می‌باشد.

محل مرکز سختی:



$$x_K = \frac{\sum k_i x_i}{\sum k_i}$$

نسبت به مبدا

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

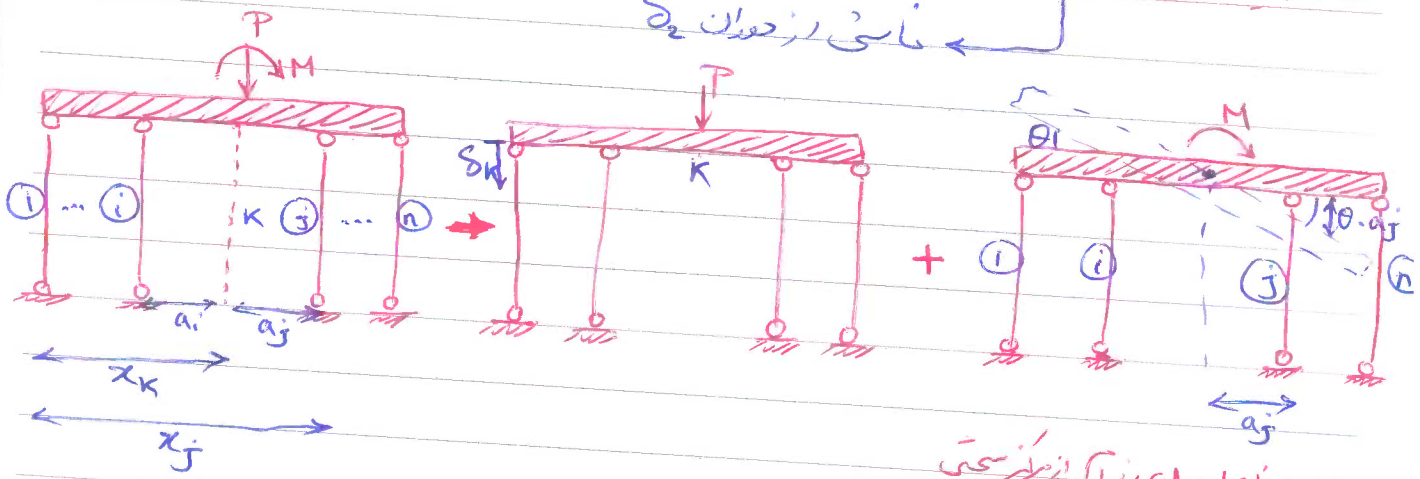
* برآیند چندنوع بارگذاری خارجی همیشه از مرکز سختی می‌گذرد ← نیروها را به مرکز سختی انتقال می‌دهیم

نکته: اگر جسم صلب دوران نداشته ← گشتاور نیروها حول مرکز سختی صفر

خاصیت دوران:

δ_1 ← ناشی از نیرو

δ_2 ← ناشی از دوران



a_i: فاصله میله‌ی i ام از مرکز سختی

M: لنگر نیروها حول مرکز سختی

مرکز سختی

$$x_K = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$$

$$\delta_K = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} k_i}$$

$$\theta = \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i^2}$$

سرانجام:

تغییر طول میله i ام در فاصله a_j از مرکز سختی ⟵

فاصله از مرکز سختی

$$\delta_j = \frac{P}{\sum_{i=1}^{n} k_i} \pm \frac{M}{\sum_{i=1}^{n} k_i a_i^2} a_j$$

نیروی هر میله ⟵

$$F_j = \frac{k_j}{\sum k_i} P \pm \frac{k_j a_j}{\sum k_i a_i^2} M$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

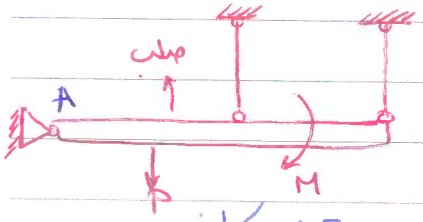
Date: No:

دقت: اگر تغییر مکان حاصل از ممان با تغییر مکان حاصل از نیرو هم جهت بود

$\delta_{کل} = \delta_{ممان} + \delta_{نیرو}$

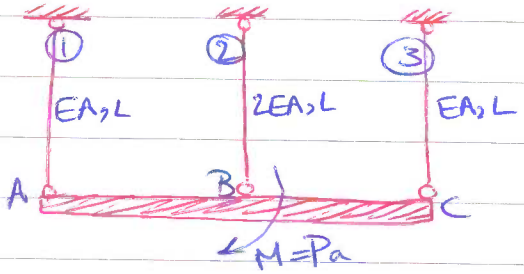
و بالعکس $\longleftarrow$ $\delta_{کل} = \delta_1 - \delta_2$

نکته مهم: اگر تکیه‌گاه مفصلی در سازه داشتیم همان تکیه‌گاه را مرکز سختی دوران در نظر می‌گیریم در این شرایط تغییر مکان فقط و فقط ناشی از دوران است و نیرو در تغییر مکان سهیم نیست. (مهم)



$A \longrightarrow$ مرکز سختی

نکته: اگر بر سازه‌ای که محور تقارن دارد، بار یا ممان متقارنی وارد شود، تغییر مکان میله‌ی روی محور تقارن صفر است.

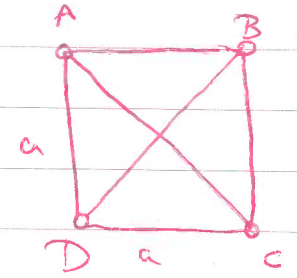


$\longrightarrow$ $\boxed{F_2 = 0}$ فعل و تعامل تک‌تک سازه‌ها

اگر تغییر دما و خطای ساخت در سازه‌های نامعین:

اگر مثلاً ضریب انبساط حرارتی (α) در سازه یکی نباشد $\longleftarrow$ در اعضا نیروی داخلی ایجاد می‌شود

دقت: مثلاً در شکل زیر چون سازه‌ی تغییر شکل‌دار داریم در اعضا نیرویی بالت افزایش دما وارد نمی‌شود.



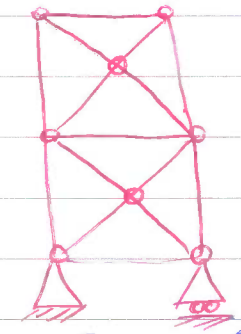
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

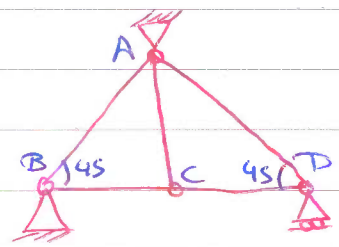
Subject:

Date: No:

نکته 3 اگر جسم ما صلب باشد چه تکیه‌گاه‌ها چه بدون تکیه‌گاه، در صورتی که دمای همه‌ی اعضا $\alpha\Delta T$ وارد شود، هیچ نیرویی در اعضا به وجود نمی‌آید.



نکته: در سازه‌ی نامعین اگر قسمت معین سازه تحت بارگذاری قرار گیرد (حرارتی)، هیچ نیرویی ایجاد نمی‌شود.



سازه‌های نامعین شامل تغییر حرارت:

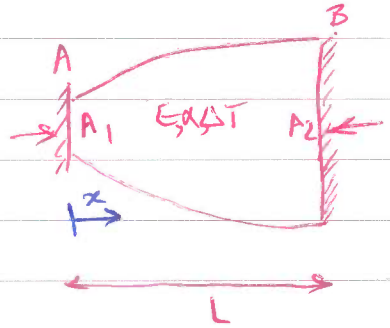
$$\boxed{\Delta L = \frac{PL}{EA} + L\alpha\Delta T}$$

اگر عضو در فشار بود ← $P = -P$

اگر بارگذاری حرارتی غیریکنواخت بود:

$$\Delta L_{\text{کل}} = \int_0^L L\Delta T\, dx$$

مثال



$$\vec{\Delta_B} = L\alpha\Delta T - \int_0^L \frac{R\,dx}{EA(x)}$$

$$A(x) = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{L}x$$

PENIX Note Book

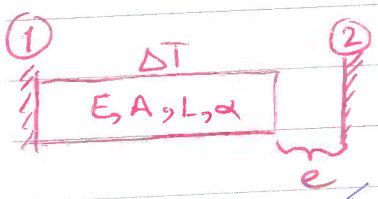
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: Mostafa Rahimi

Date: No:

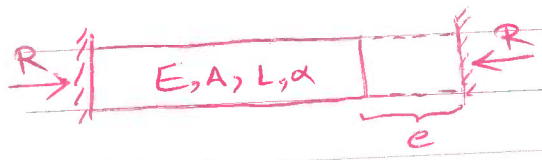
بررسی خصوصیات ساخت برای سازه های معین:

حالت اول: اگر میزان افزایش طول میله در اثر بالا رفتن حرارت از خصوصیات ساخت e کوچکتر باشد، انتهای میله به تکیه گاه (2) نرسیده و نیروی در میله ایجاد نمی شود.



$$\alpha L \Delta T \le e \Rightarrow R = 0$$ نیروی میله

حالت دوم: اگر $\alpha L \Delta T$ از e بزرگتر باشد، نیروی فشاری ایجاد شده و باعث کوتاه شدن طول میله می شود



$$\boxed{\alpha L \Delta T - \frac{RL}{EA} = e}$$

افزایش طول حرارتی

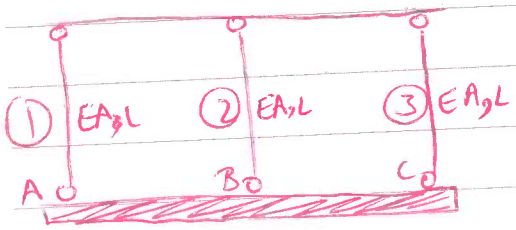
کاهش طول در اثر عکس العمل تکیه گاه

خصوصیات اولیه

$$\text{تنش در میله} = \frac{R}{A} = \frac{E}{L}(\alpha L \Delta T - e)$$

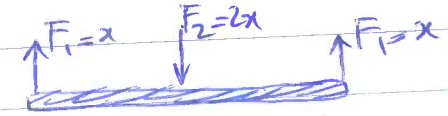
Result: تنش و تغییر دما رابطه مستقیم با هم ندارند. یعنی اگر میزان افزایش دما دو برابر شود، تنش های ایجاد شده در اثر حرارت کمتر از دو برابر مقدار اولیه افزایش می یابد.

مثال مهم:



میله ی (2) از مقدار واقعی بلندتر ساخته شده است

پس داریم:



F_1 و F_3 ← کششی

F_2 ← فشاری

$$\Delta_B = \frac{\Delta_A + \Delta_C}{2}$$

$$\Delta_A = \Delta_C = \frac{xL}{EA}$$

$$\Delta_B = e - \frac{2xL}{EA}$$

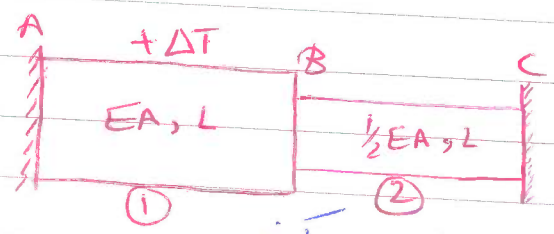
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

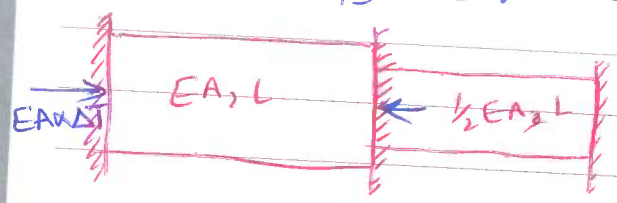
Date: . . No:

روش ستون و باز کردن در میله : (۴۴)



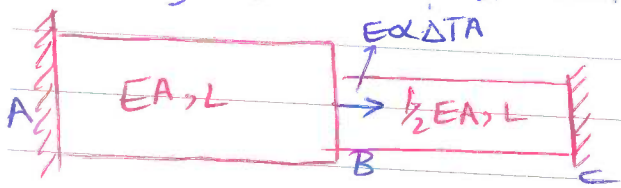
در شکل روبرو فرض می‌کنیم عضو AB دمای $+\Delta T$ بگیرد

① B را می‌بندیم. حال عکس العملی که در اثر نیروی حرارتی به وجود می‌آید به صورت فشاری به دو طرف AB اعمال می‌کنیم

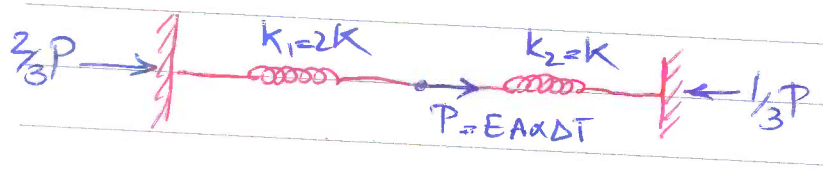


$P = EA\alpha\Delta T$ (I)

② B را باز می‌کنیم و عکس نیروی به دست آمده را (P) را در جهت مخالف تأثیر می‌دهیم.



③ حال این نیرو را ($EA\alpha\Delta T$) بین تکیه‌گاه‌ها تقسیم می‌کنیم. باید دقت کرد اگر از شیوه‌ی فنر استفاده کنیم به نسبت سختی‌های فنرها به تکیه‌گاه‌ها تقسیم می‌شود.



(II)

④ حال دو شکل (I) و (II) را با هم جمع جبری می‌کنیم:

تکیه‌گاه

$$A = E\alpha\Delta TA + \left(-\tfrac{2}{3}E\alpha A\Delta T\right) - \boxed{\tfrac{1}{3}EA\alpha\Delta T} = R_C$$

$$\boxed{R_C = \tfrac{1}{3}EA\alpha\Delta T}$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

تکنیک باز و بسته کردن در روش خطای ساخت:

در مرحله‌ی بستن باید نیروی پیرا در سازه اعمال کنیم تا خطای ساخت را از بین ببرد.

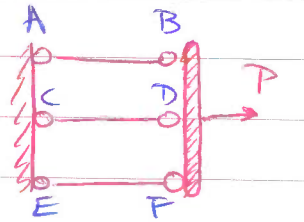
وقتی عضو کوتاه‌تر شده باشد ← نیرو به صورت کششی

" " بلندتر " " ← " فشاری

$$e = \frac{PL}{EA} \Rightarrow \boxed{P = \frac{eAE}{L}}$$

نکته مهم:

① اگر در سیستمی تقارن وجود داشت، عضوهای کناری دارای نیروی مساوی هستند. برای به دست آوردن نیروی وسطی باید از روش Δ سازگاری استفاده کرد.



کناری $\boxed{F_{AB} = F_{EF}}$ $\Delta_{CD} = \frac{1}{2}(\Delta_{AB} + \Delta_{EF})$

② منظور از ایزواستاتیک ← سازه معین هیپراستاتیک ← سازه نامعین

PENIX NOTE BOOK

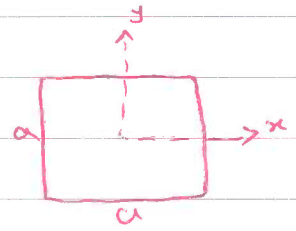
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: فصل چهارم: خمش:

Date: No:

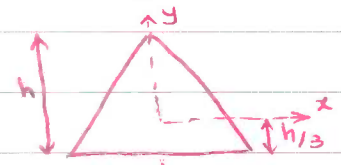
ممان اینرسی قطبی $J = I_x + I_y = \int_A \rho^2 dA$

ممان اینرسی چند مقطع:



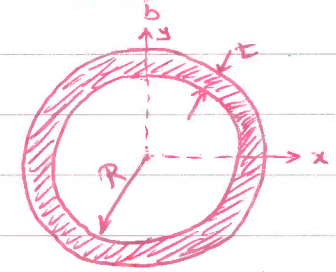
$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$

$I_{xy} = 0$



$I_x = \frac{bh^3}{36}$

$I_{xy} = 0$

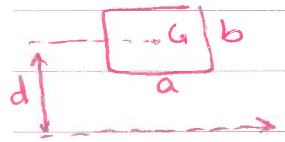


$I_x = I_y = \pi R^3 t$

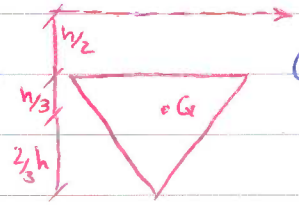
$I_{xy} = 0$

$A = 2\pi R t$ $\qquad J = 2\pi R^3 t$

* اگر مرکز سطح بالای محور باشد گشتاور استاتیک (+) و اگر پایین محور باشد گشتاور استاتیک (−)



$Q_x = A\bar{y} = abd$



$Q_x = \left(\frac{bh}{2}\right) \times \left(-\left(\frac{h}{3} + \frac{h}{2}\right)\right) = \boxed{-\frac{5}{12} bh^2}$

$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ و $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

نکته مهم: اگر اشکال به موازات محوری حرکت داده شوند تغییر در مشخصات هندسی مقاطع نسبت به آن محور ایجاد نمی‌شود.

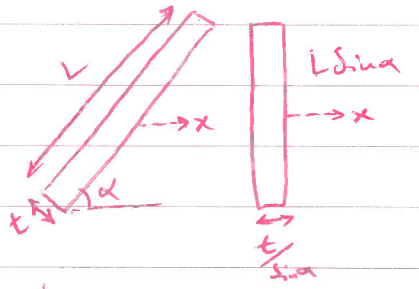
$(I_x)_1 = (I_x)_2 = \frac{bh^3}{3}$

PENIX NOTE BOOK
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

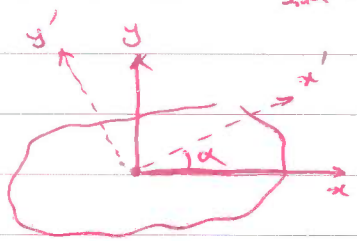
نکته ۲: برای محاسبه‌ی گشتاور استاتیک و ممان اینرسی اعضا جدار نازک حول یک محور، ابتدا مقطع را به بخش‌هایی که ضخامت در راستای کلان دارند تقسیم کرده و سپس هر بخش را در راستای عمود بر محور مورد نظر تصویر می‌کنیم. در ادامه ضخامت را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که مساحت شکل تصویر یافته و شکل اصلی یکسان باشد.



$$A_1 = Lt \Rightarrow A_2 = L\sin\alpha \cdot t' = Lt$$

$$\Rightarrow \boxed{t' = \frac{t}{\sin\alpha}}$$

$$I_x = \frac{\left(\frac{t}{\sin\alpha}\right) \times (L\sin\alpha)^3}{12} = \frac{tL^3\sin^2\alpha}{12}$$



محاسبه‌ی ممان اینرسی مقطع حول محورهای دوران یافته:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$

مشکل دایره مور

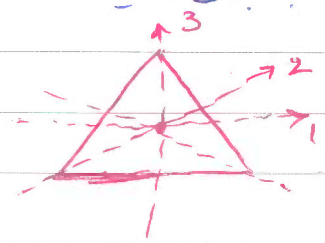
$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha$$

$$tg\, 2\beta = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}, \quad I_{max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

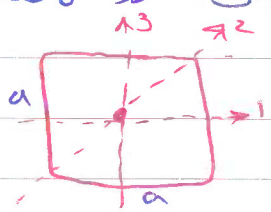
جمع مقادیر ممان اینرسی در این محورها برابر $I_x + I_y$ است.

$$I_{max} + I_{min} = I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'}$$

نکته ۳: اگر در مقطعی دو محور تقارن غیر متعامد یا بیش از دو محور تقارن وجود داشته باشد، همه‌ی محورهای عبوری از مرکز سطح آن، محور اصلی محسوب می‌شوند و مقادیر ممان اینرسی نسبت به آن‌ها یکسان است.



$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{\sqrt{3}}{96}a^4$$



$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{a^4}{12}$$

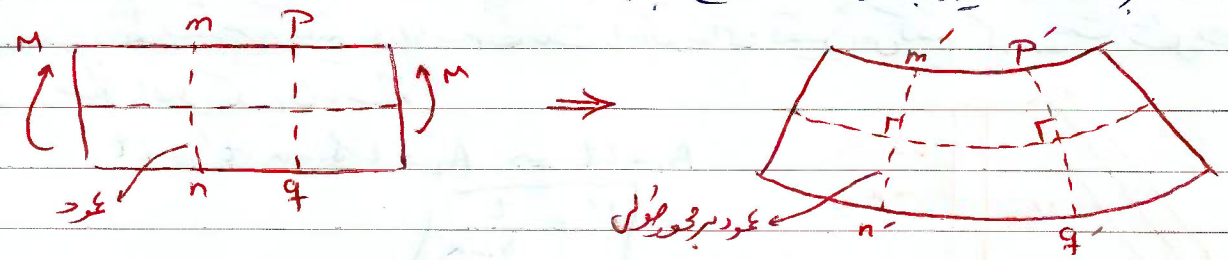
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

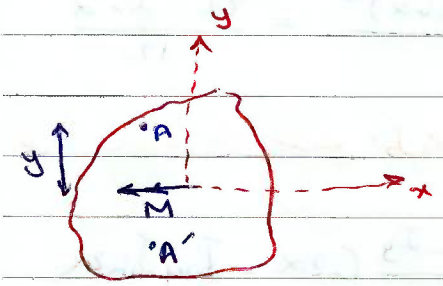
Subject:

Date: No:

* در خمش خالص یک تیر فرض می‌شود که مقاطع عمود بر محور طولی (مانند mn ، pq) پس از بارگذاری نیز عمود بر محور طولی تیر و به صورت مسطح باقی می‌مانند.



این موضوع فرض اساسی خمش نام دارد (تئوری اولر - برنولی)

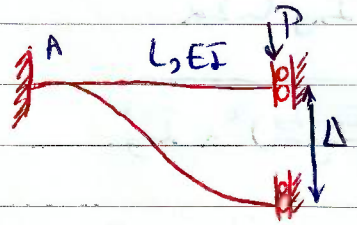


خمش ساده 3

$$\boxed{\sigma_A = -\frac{My}{I_x}}$$

با علامت گذاشته شود

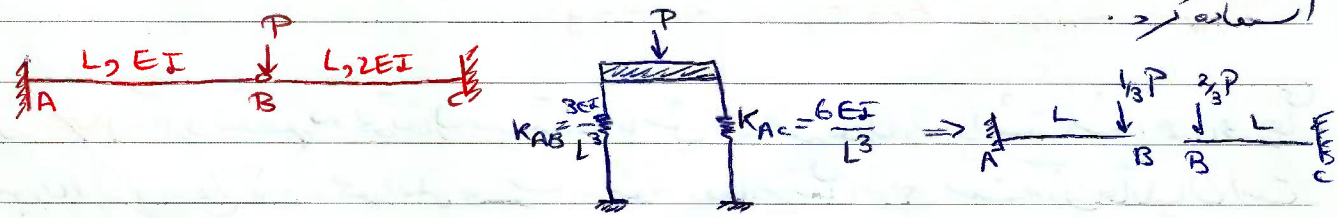
نکته: در مقاطع منتظم از جمله مربع، تمام محورهای عبوری از مرکز محور اصلی محسوب می‌شوند.



یادآوری:

$$\boxed{\Delta = \frac{PL^3}{12EI}}$$

نکته: برای بدست آوردن لنگر خمشی در نقاط A و C می‌توان از تکنیک فنر و توزیع نیروها بر اساس EI استفاده کرد.

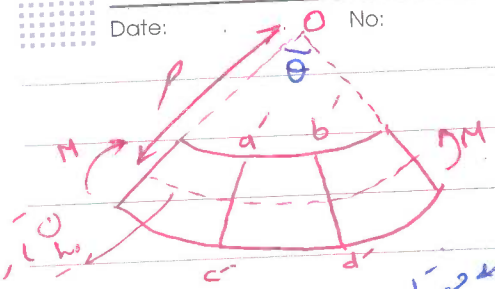


$M_A = \frac{1}{3}PL$ ، $M_B = \frac{2}{3}PL$

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

بررسی شعاع انحنا مقطع در حالت خمش خالص:



$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

$$\boxed{L = \rho\theta}$$

فقط در محدوده الاستیک اعتبار دارد

ρ: شعاع انحنا

$\frac{1}{\rho}$: انحنا

اگر تقعر ⊕ ← انحنا ⊕

اگر تقعر ⊖ ← انحنا ⊖

رابطه بین تنش و شعاع انحنا:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M = \frac{EI}{\rho} \\ \sigma = -\frac{My}{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\sigma_z = -\frac{Ey}{\rho}}$$

$$\boxed{\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}} \quad , \quad \boxed{\epsilon_z = -\frac{y}{\rho}}$$

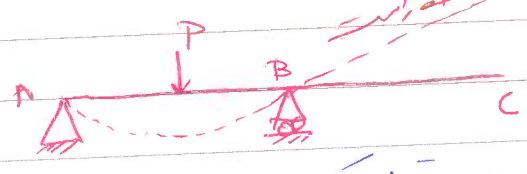
علامت منفی را می‌توان به کار نبرد، در صورتی که از جهت کشش یا فشاری بودن همان نقطه‌ی مورد نظر را بررسی کرد.

* اگر در یک مقطع $\sigma = E\epsilon^n$ داریم:

$$\boxed{\frac{1}{\rho^n} = \frac{M}{K}}$$

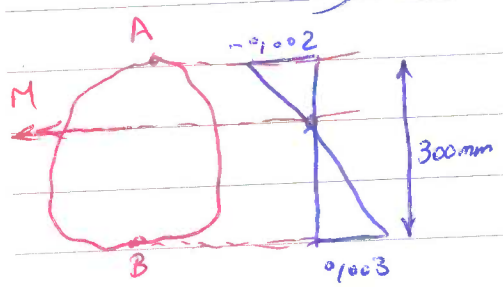
عددی ثابت وابسته به جنس و ابعاد مقطع

نکته: اگر در قسمتی از یک تیر لنگر خمشی صفر باشد پس انحنا صفر است و در آن جا تیر به صورت یک خط راست است.



$$\boxed{\rho_{BC} = \infty}$$

* اگر اختلاف کرنش دو نقطه مد نظر بود، می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد:



$$\boxed{\epsilon_B - \epsilon_A = \frac{y_A - y_B}{\rho}}$$

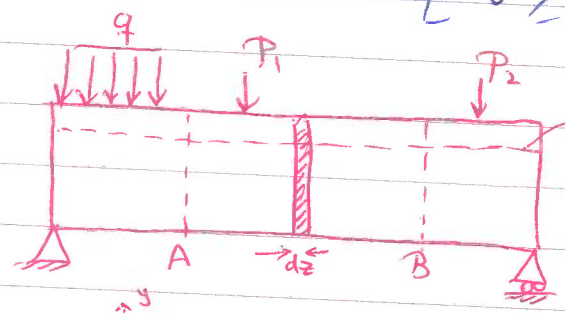
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

نکته مهم: برای بدست آوردن تغییر طول تار خنثی از انتگرال گیری می‌کنیم:

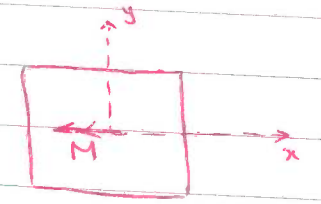


$$\boxed{\Delta = \int_A^B -\frac{My}{EI}\,dz = -\frac{y}{EI}\underbrace{\int_A^B M\,dz}}$$

تغییر طول تار

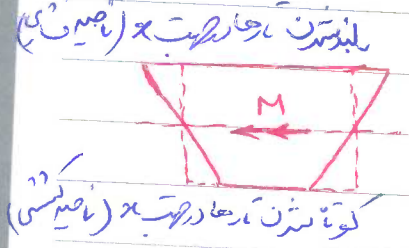
سطح زیر نمودار لنگر خمشی از A تا B

کرنش عرضی در حالت خمش خالص:

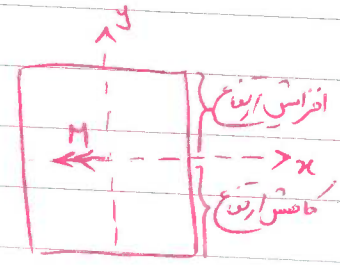


$$\begin{cases} \epsilon_x = -\nu\epsilon_z = \nu\frac{y}{\rho} = \nu\frac{My}{EI} \\ \epsilon_y = -\nu\epsilon_z = \nu\frac{y}{\rho} = \nu\frac{My}{EI} \end{cases}$$

پس در حالت لنگر مثبت پس از تغییر شکل مقطع در بالای محور x ها دچار افزایش پهنا و در زیر محور x ها دچار کاهش پهنا می‌شود.



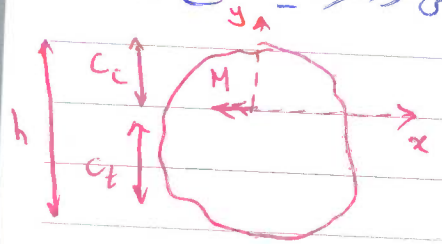
اگر اثر پواسون را در جهت y ها در نظر بگیریم؟



$\epsilon_y = \nu\frac{y}{\rho} \xrightarrow{y>0} \epsilon_y > 0 \Rightarrow$ ارتفاع مقطع در بالای ناحیه خنثی افزایش می‌یابد

$\epsilon_y = \nu\frac{y}{\rho} \xrightarrow{y<0} \epsilon_y < 0 \Rightarrow$ ارتفاع مقطع در پایین تار خنثی کاهش می‌یابد

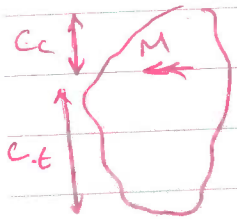
نکته: اگر تار خنثی در وسط قرار داشته باشد زیرا کاهش ارتفاع در قسمت کششی و افزایش ارتفاع در قسمت فشاری یکسان بوده و تغییر ارتفاع مقطع صفر است.



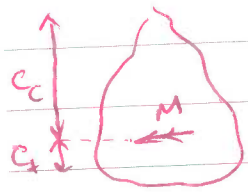
$c_c = c_t \Rightarrow$ ارتفاع کل $c_c + c_t$ تغییر نمی‌کند

PHNIX NOTE BOOK
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:



$C_t > C_c \Rightarrow C_t$ کاهش $> C_c$ افزایش $\Rightarrow$ ارتفاع کل مقطع کاهش می‌یابد

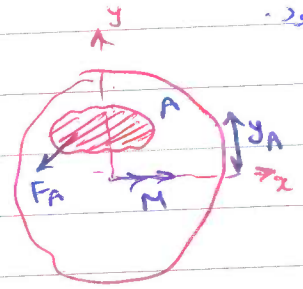


$C_c > C_t \Rightarrow C_c$ افزایش $> C_t$ کاهش $\Rightarrow$ ارتفاع کل مقطع افزایش می‌یابد

دقت: چون $\epsilon = \frac{y}{\rho}$ به y بستگی دارد $\leftarrow$
$\epsilon_x \leftarrow$ y ثابت $\leftarrow$ انتگرال نمی‌خواهد
$\epsilon_y \leftarrow$ y در ارتفاع متغیر $\leftarrow$ انتگرال می‌خواهد

توزیع لنگر خمشی و نیروی تحمل شده در مقطع:

لنگر خمشی در قسمت های مختلف مقطع به نسبت EI توزیع می‌شود.



$$\frac{M_A}{M_{کل}} = \frac{E_i I_i}{\sum E_i I_i}$$

$$F_A = \frac{M_A Q_A}{I_{کل}}$$

$$Q_A = A\bar{y}$$

فاصله نیروی وارد بر سطح هاشور خورده از تار خنثی

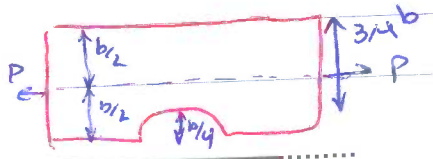
ممان اینرسی سطح هاشور خورده

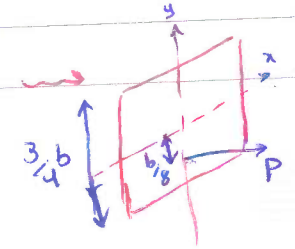
نکته $\Rightarrow$

$$\begin{cases} M_A = F_A y_A \\ M_A = \frac{I_A}{I} M \\ F_A = \frac{M Q_A}{I} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{y_A = \frac{I_A}{Q_A}} \leftarrow \text{مهم}$$

گشتاور استاتیک سطح هاشور خورده

نکته: اگر در مسئله‌ای قسمتی از مقطع را بریده بودند، شکل متقارن می‌شود و محل تمرکز تنش به اندازه نصف فاصله‌ی وسط مقطع تا لبه به لبه نزدیک می‌شود.





$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{S_x} = \frac{P}{b \times 3/4\, b} + \frac{\frac{Pb}{8}}{\frac{b \times (3/4\, b)^2}{6}} = \frac{8}{3}\frac{P}{b^2}$$

PENIX NOTE BOOK

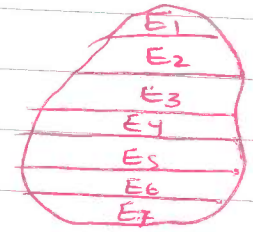
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

خمش خالص در مقاطع مرکب:

دو روش حل داریم:



① حل به روش همگن سازی و مدول:

ابتدا مقطع را نسبت به یکی از مصالح تشکیل دهنده ی آن همگن می کنیم

$$n_j = \frac{E_j}{E_0}$$

مدول الاستیسیته ماده مبنا

$$\bar{y} = \frac{n_1 A_1 \bar{y}_1 + n_2 A_2 \bar{y}_2 + \cdots}{n_1 A_1 + n_2 A_2 + \cdots}$$

محل تار خنثی

حال ممان اینرسی کل مقطع را حساب می کنیم:

$$\bar{I} = \sum_{j=1}^{n} n_j I_j = n_1 I_1 + n_2 I_2 + \cdots$$

I_j: ممان اینرسی هر قسمت نسبت به تار خنثی

n_j: ضریب همگنی

$$\sigma = -n_j \frac{M y}{\bar{I}}$$

فاصله نقطه مورد نظر از تار خنثی

ضریب همگنی

ممان اینرسی کل

توزیع لنگر

$$M_i = \frac{E_i I_i}{\sum E_i I_i} M = \frac{n_i I_i}{\sum n_i I_i} M$$

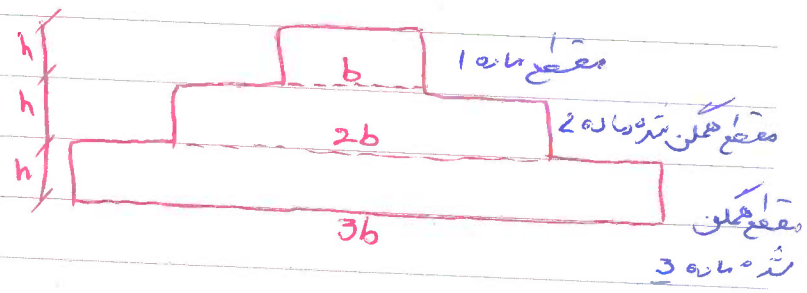
② حل به روش مقطع همگن شده و رسم آن:

این روش برای محاسبه ی مشخصات هندسی مقاطع متقارن مناسب است.

در این روش ابتدا مساحت هر ماده را در ضریب همگنی آن ضرب می کنیم (ارتفاع ثابت است)

$E_1 = E$
$E_2 = 2E$
$E_3 = 3E$

مقطع همگن شده



PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

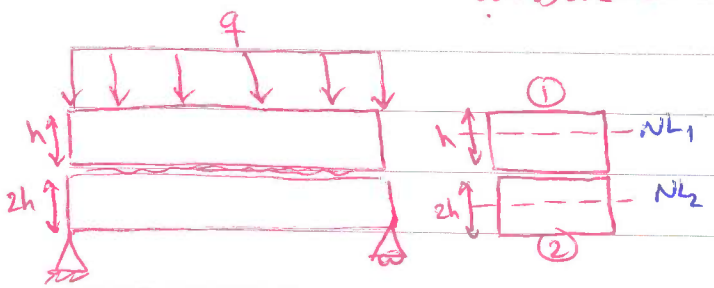
حال محل تار خنثی را در این شکل همگن شده پیدا می‌کنیم و ممان اینرسی کل را در آن حساب می‌کنیم

پس $\Rightarrow$ $\boxed{\sigma = -n_j \frac{My}{\bar{I}}}$

نکته واقعاً مهم: در مقاطع مرکب برای محاسبه‌ی ρ (انحنا) از E_1 (مبنا) و ممان اینرسی مقطع همگن شده نسبت به تار خنثی استفاده می‌کنیم.

در مقاطع مرکب $\Rightarrow$ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E\bar{I}}$

ماده مبنا — ممان اینرسی کل



خمش در مقاطع غیر یکپارچه:

مثلاً اگر دو قطعه موسوم به آزاد هم داشته باشیم:

در این حالت دقیقاً مانند دو فنر موازی عمل می‌کنیم

و لنگر خمشی و بار وارده به نسبت EI بین دو قطعه تقسیم می‌شود. در این حالت تار خنثی منحصر به فرد نیست و هر قطعه یک تار خنثی دارد.

$$\boxed{M_1 = \frac{EI_1}{EI_1 + EI_2} M_{کل}} = \frac{E \times \frac{bh^3}{12}}{E \times \frac{bh^3}{12} + E \times \frac{b \times (2h)^3}{12}} \times M = \boxed{\tfrac{1}{9}M \ , \ M_2 = \tfrac{8}{9}M}$$

ممان اینرسی خود قطعه

ممان اینرسی نه مجموعه خمشی

$I_2 = 8I_1 \ , \ q_2 = 8q_1$

$\sigma_1 = \frac{M_1}{S_1}$

نسبت به تار خنثی خود قطعه

بعد از بدست آوردن لنگر هر قطعه و تنش هر قطعه آن مقطعی که تنش بزرگتری را تحمل می‌کند را انتخاب می‌کنیم و سپس مقدار آن را برابر تنش مجاز ماده قرار می‌دهیم و لنگر تحمل شده در حالت مجاز را بدست می‌آوریم.

اگر از مسب استفاده کنیم دیگر مقطع غیر یکپارچه نیست و به یک پارچه تبدیل می‌شود

PENIX NOTE BOOK

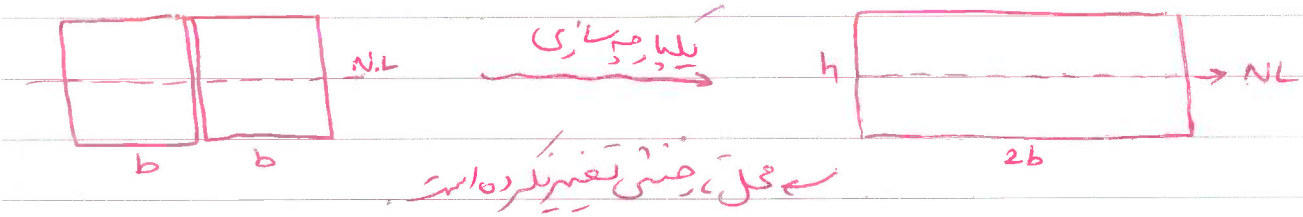
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

نکته جالب: اگر پس از اتصال چند قطعه محل تار خنثی تغییر نکند، با یکپارچه کردن سیستم هیچ تغییری در ویژگی های مقطع ایجاد نمی شود.

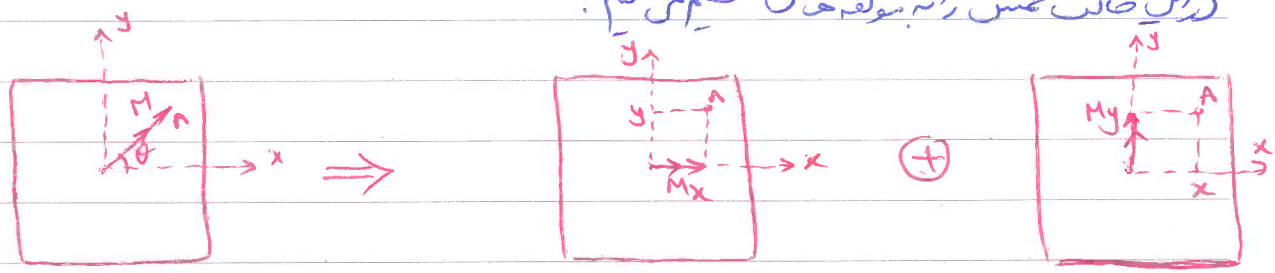
ولی اگر جای محور خنثی تغییر کند، مقاومت خمشی و تنش ها تغییر می کنند.



نکته واقعاً مهم: در مقاطع یکپارچه و غیر یکپارچه لنگر خمشی بین قسمت های مختلف همواره به نسبت EI توزیع می شود. باید دقت شود که در مقاطع یکپارچه I ممان اینرسی هر قسمت نسبت به تار خنثی واحد موجود در مقطع بوده و در مقاطع غیر یکپارچه، I ممان اینرسی هر قسمت حول محور عبوری از مرکز سطح آن می باشد.

خمش دو محوره:

در این حالت خمش را به مولفه هایش تقسیم می کنیم:



دقت: باید با استفاده از کلینک دست راست همواره علامت تنش حاصل در نقطه را ناشی از حول محور x و خمش حول محور y را تعیین کنیم و با جمع کردن آن ها از علامت نهایی نقطه مورد نظر اطلاعات کسب کنیم.

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M\cos\theta}{I_x}\,y - \frac{M\sin\theta}{I_y}\,x}$$

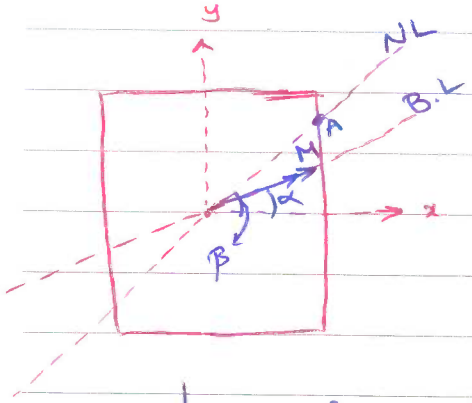
با علامت گذاشته شود

PONIX Note Book

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

نکته واقعاً مهم: در خمش دو محوره تار خنثی در یک مقطع از دو محور خمش به سمت محور ضعیف مقطع (y) حامل می‌شود. اگر زاویه محور خمش و تار خنثی نسبت به محور قوی در نظر گرفته شود، در این صورت نسبت شیب تار خنثی به شیب محور خمش برابر نسبت ممان اینرسی حول دو محور است.



$$\frac{tg\beta}{tg\theta} = \frac{I_x}{I_y}$$

I_x → ممان اینرسی محور قوی

I_y → ممان اینرسی محور ضعیف

$tg\beta$ → شیب تار خنثی

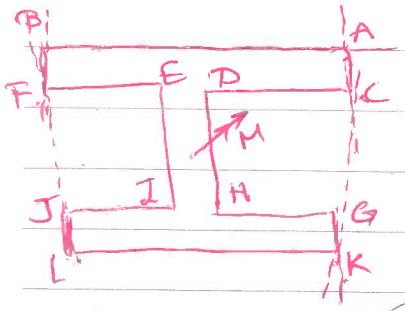
$tg\theta$ → شیب محور خمش

β : زاویه تار خنثی با محور قوی

θ : زاویه محور خمش با محور قوی

↳ if $I_x = I_y$ → خمش ساده می‌شود

نکته: در خمش دو محوره، مقادیر حداقل و حداکثر تنش‌ها در نقاط مرزی خصوصاً در گوشه‌های مقطع در ضد صلعی مقطع محیط بر مقطع قرار دارد.



تنش حداکثر رخ می‌دهد ← A, B, F, L, K, C

تنش حداکثر رخ نمی‌دهد ← E, D, G, J

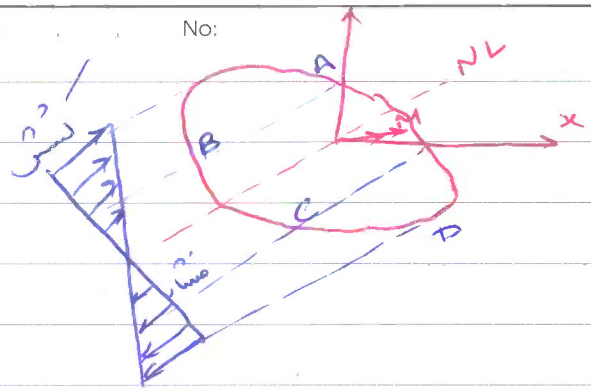
* در تار خنثی تغییر طول تار صفر است. باید توجه شود که تارها در قسمت کششی دچار افزایش طول و در قسمت فشاری دچار کاهش طول می‌شوند. (در ابتدای طولی)

** در مقطع تحت خمش، اگر تنش دو نقطه مساوی و هم علامت باشد، خط واصل بین دو نقطه به موازات تار خنثی بوده و شیب این خط برابر شیب تار خنثی است.

www.CivilFile.com
سیویل فایل مرجع فایل های مهندسی عمران
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

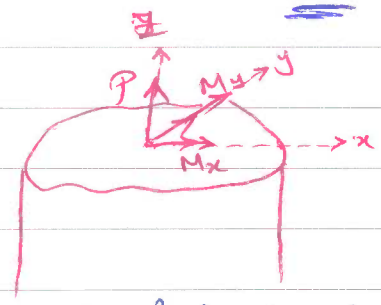
Subject:

Date: No:



EXP تنش در A و B هم اندازه و هم نوع است.
پس خط AB و تار خنثی موازی است.

نکته: اگر نیروی برشی در راستای محورهای اصلی واقع نشود، در این صورت راستای خمش حاصل از آن عمود بر راستای نیروی برشی قرار دارد. در این حالت محور خمش در راستای محورهای اصلی قرار نداشته و خمش دو محوره در سازه ایجاد می‌شود. پس در خمش یک محوره تار خنثی و محور خمش بر هم منطبقند (فقط محور برش (S.L) همواره بر محور خمش (B.L) عمود است.



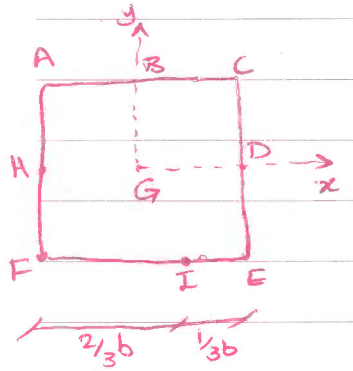
برسی ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی در مقطع:

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

* در مرکز سطح تنش‌های قائم ناشی از لنگر صفر است و تنش ایجاد شده فقط ناشی از نیروی محوری است.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\sigma_z = \frac{P}{A}} \quad , \quad \boxed{\epsilon_z = \frac{P}{EA}}$$

کرنش در مرکز سطح



نکته: توزیع کرنش‌ها:

$$\epsilon_B = \frac{\epsilon_A + \epsilon_C}{2} \qquad \epsilon_D = \frac{\epsilon_C + \epsilon_E}{2}$$

$$\epsilon_G = \frac{\epsilon_C + \epsilon_F}{2} = \frac{\epsilon_H + \epsilon_D}{2} = \frac{\epsilon_A + \epsilon_C + \epsilon_E + \epsilon_F}{4}$$

$$\epsilon_H = \frac{\epsilon_A + \epsilon_F}{2} \quad , \quad \epsilon_I = \frac{2\epsilon_E + \epsilon_F}{3}$$

PONIX NOTE BOOK
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

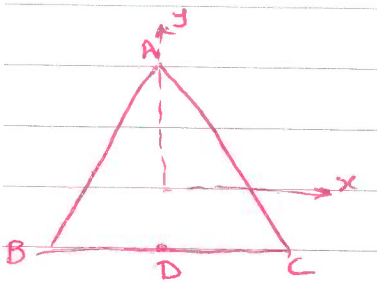
نکته مهم: در یک مقطع مرکب، در صورتی که نیروی محوری P در مرکز سطح مقطع اثر کند، در مقطع تنش های قائم ناشی از خمش ایجاد نمی شود و داریم:

$$\sigma_z = \frac{P}{A} = \frac{P}{n_1 A_1 + n_2 A_2 + \cdots}$$

n: ضریب همگنی

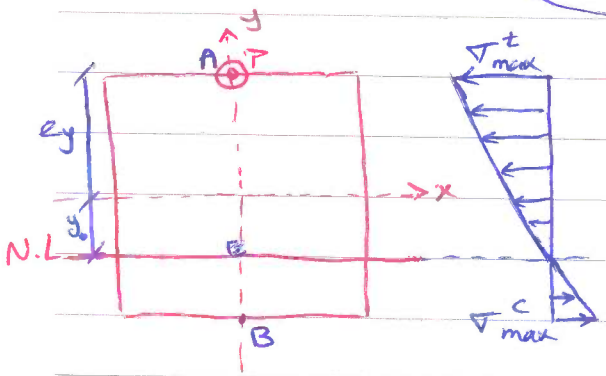
A: مساحت واقعی هر ماده

* نیروی محوری به نسبت EA توزیع می شود.



نکته: کرنش در مرکز سطح مثلث:

$$\epsilon_G = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C}{3} = \frac{P}{EA}$$



تنش های ناشی از نیروی محوری خارج از مرکز در یک مقطع:

نقطه A: $\sigma^t_{max} = \left|\frac{P}{A}\right| + \left|\frac{M}{S_t}\right|$ → اساس مقطع الاستیک

نقطه B: $\sigma = \left|\frac{P}{A}\right| - \left|\frac{M}{S_c}\right|$ → اساس مقطع فشاری

به دست آوردن محل تار خنثی:

در تار خنثی → $\sigma = 0 \Rightarrow \frac{P}{A} + \frac{My}{I_x} = \frac{P}{A} + \frac{P(e_y)y}{I_x} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{y_0 \times e_y = -\frac{I_x}{A} = -r_x^2}$$

شعاع ژیراسیون حول محور x

خروج از مرکزیت نیروی محوری

خروج از مرکزیت تار خنثی

برای هم نیروی فشاری و هم برای نیروی کششی برقرار است

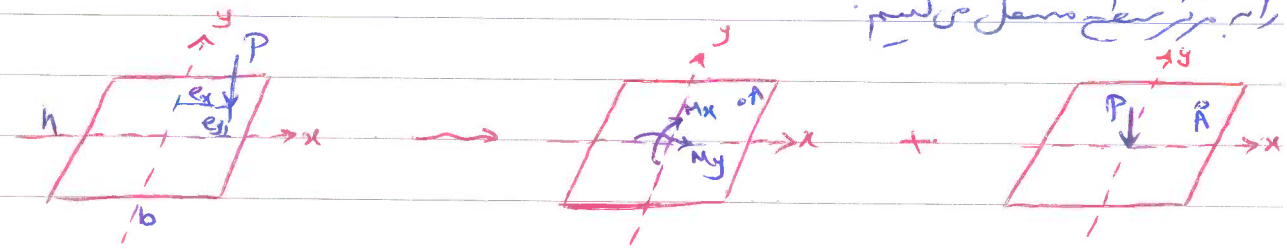
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

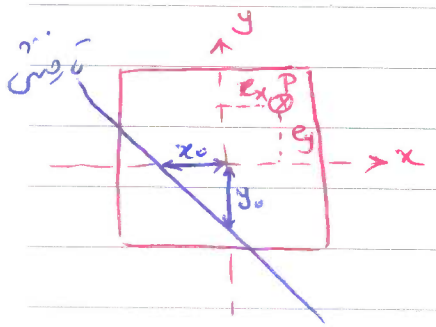
Subject:

Date: No:

* اگر بار P در راستای x و y از مرکز خارج باشد نیروی P و لنگرهای به وجود آمده M_x و M_y را به مرکز سطح منتقل می‌کنیم:



در این حالت تار خنثی مطابق شکل زیر است:



$$\begin{cases} y=0 \ , \ x=x_0 \Rightarrow x_0 \times e_x = -\dfrac{I_y}{A} = -r_y^2 \\ x=0 \ , \ y=y_0 \Rightarrow y_0 \times e_y = -\dfrac{I_x}{A} = -r_x^2 \end{cases}$$

$$\sigma = 0 \Rightarrow \frac{-P}{A} - \frac{Pe_y}{I_x} y - \frac{Pe_x}{I_y} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{e_y \cdot y}{\frac{I_x}{A}} + \frac{e_x \cdot x}{\frac{I_y}{A}} = -1}$$ معادله تار خنثی

هسته مرکزی مقطع:

هسته مقطع ناحیه ای است که اگر نیروی محوری P در یکی از نقاط آن اثر کند، در کلیه نقاط واقع در مقطع تنش هایی هم علامت با نیروی محوری ایجاد می‌شود. مثلاً اگر نیروی محوری به صورت کششی بر مقطع اعمال شود کل مقطع در کشش بوده و تنش فشاری در مقطع ایجاد نمی‌شود و بالعکس.

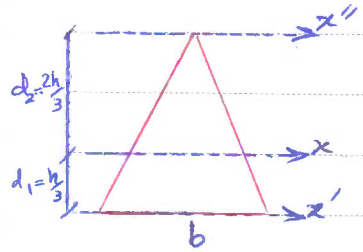
نکته: اگر نیروی محوری در درون هسته مرکزی بر مقطع اثر کند تار خنثی لزوماً مقطع را قطع نمی‌کند زیرا در صورت قرار گرفتن تار خنثی در درون مقطع، در طرفین تار خنثی تنش ها بقیه علامت داده و تنش های ایجاد شده در نقاط مختلف مقطع هم علامت نمی‌باشد.

هسته ی مرکزی مستطیل یک لوزی است.
هسته مرکزی لوزی یک مستطیل است

PENIX NOTE BOOK
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: Mostafa Rahimi
Year. Month. Date. ( )

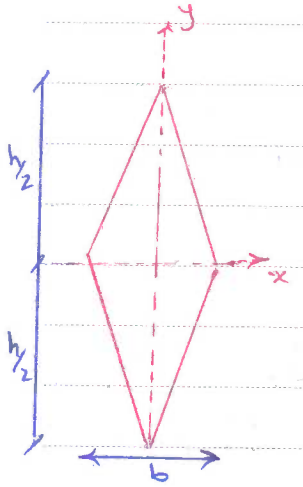
چند ممان اینرسی مهم:



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

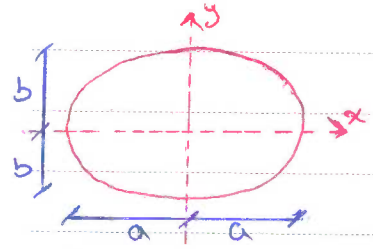
$$I_{x'} = \frac{bh^3}{12}$$ ممان اینرسی حول محور عبوری از قاعده مثلث

$$I_{x''} = \frac{bh^3}{4}$$ " " " " " راس مثلث



$$I_x = \frac{bh^3}{48}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{48}$$



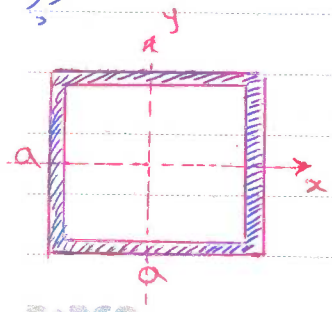
$$I_x = \frac{\pi a b^3}{4} \qquad I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

نکته جالب: در محاسبه ممان اینرسی مقاطع جدار نازک می‌توانیم از سطح توپر متناظرشان دیفرانسیل بگیریم

$$I_{(\text{مربع توپر})} = \frac{a^4}{12} \Rightarrow I_{\text{قوطی}} = d\left(\frac{a^4}{12}\right) = \frac{1}{3}a^3(da)$$

دیفرانسیل

توخالی مربع



در شکل روبرو دقت شود چون محور x دو ضخامت را قطع کرده است به جای da در فرمول بالا باید 2t قرار دهیم

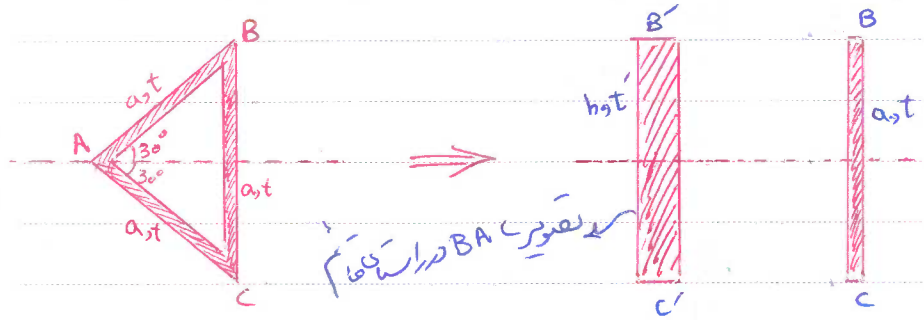
$$\Rightarrow I_{\text{قوطی}} = \frac{1}{3}a^3 2t = \boxed{\frac{2}{3}a^3 t}$$

PAPCO

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

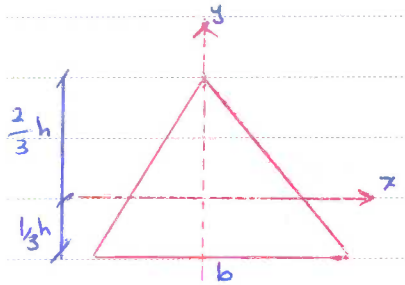
مثال جالب: در مقطع روبرو وقتی قسمت‌های مورب را به قائم تبدیل می‌کنیم مقطع به شکل زیر می‌شود:



$h = 2a\sin 30 = a$, $\underbrace{h \times t'}_{\text{مساحت } B'C'} = \underbrace{2at}_{\text{مساحت } BAC}$ $\Rightarrow \boxed{t' = 2t}$

$\Rightarrow I = I_{BC} + I_{B'C'} = \cdots$

Caution: اگر مقطع یک محور تقارن داشت I_{xy} نسبت به محور تقارن و محور عمود بر آن که از مرکز سطح بمقطع می‌گذرد صفر است.



$\boxed{I_{xy} = 0}$

نکته: اگر مقطع دو محور تقارن عمود بر هم داشت ← محورها لزوماً محورهای اصلی هستند

اگر مقطع یک محور تقارن داشت ← محور تقارن محور اصلی است
← محور اصلی دیگر عمود بر محور تقارن است که از مرکز سطح می‌گذرد

محورهای دارای ممان اینرسی ماکزیمم و مینیمم ← بر هم عمودند

PAPCO

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

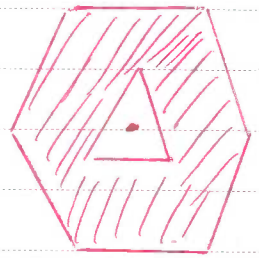
نکته ۳: اگر در یک مقطع $I_x = I_y$ و $I_{xy} = 0$ ← شعاع دایره مور صفر می‌شود ← مقطع یک نقطه

ممان اینرسی مقطع نسبت به تمام محورها صفر است

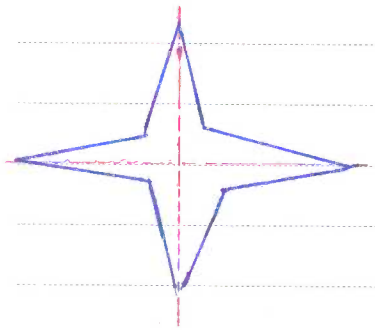
چون $I_{x'y'}$ صفر است ← همه محورها اصلی اند

بی‌نهایت محور اصلی

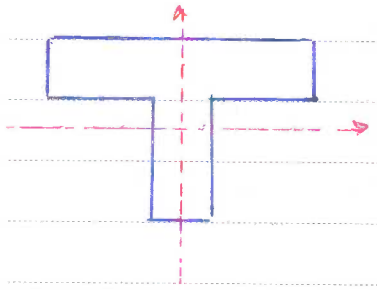
نکته جالب: در موارد زیر دایره مور تبدیل به نقطه می‌شود و تمام محورها دارای ممان اینرسی یکسان اند:



وقتی مرکز n ضلعی و n' ضلعی منتظم بر هم منطبق باشند



مقاطع دارای دو محور متقارن متعامد به صورتی که I مقطع نسبت به این محورهای تقارن متعامد برابر باشد



مقاطع دارای یک محور تقارن به صورتی که I مقطع نسبت به این محور تقارن یا ممان اینرسی مقطع نسبت به محور عمود بر این محور تقارن و گذرنده از مرکز سطح مقطع برابر باشد مانند مقطع مقابل در حالتی که در آن I_x و I_y برابر است.

PAPCO

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

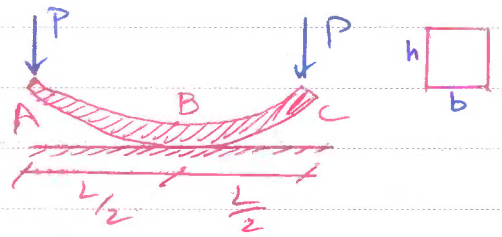
نکته به چیدان مهم!! تفاوت تئوری تیر برنولی و تیموشنکو در این است که به مقطع علاوه بر خمش، برش نیز وارد شود البته اگر خمش خالص باشد این دو تئوری تفاوتی ندارند.

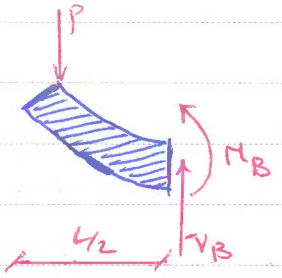
نکته واقعاً مهم 3 وقتی خمش داریم جایی که لنگر مثبت است یعنی تار پایین به کشش می‌افتد در این موقع طول تار پایین افزایش می‌یابد و طول تار بالا کاهش می‌یابد.

نکته مهم: فرض کنید در یک تیر شعاع انحنا ρ_1 است و می‌خواهیم با تغییر لنگر، شعاع انحنا را به ρ_2 برسانیم در این صورت داریم:

$$\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right) = \Delta\left(\frac{M}{EI}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\Delta M}{EI}}$$

سؤال خوب: شعاع انحنا در B در حالت بدون بار R_1 باشد نیروی P چقدر باشد تا انحنا در B صفر شود؟





$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = \frac{-PL}{2}$$

$$\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} = \frac{\Delta M}{EI} \Rightarrow 0 - \frac{1}{R_1} = \frac{-\frac{PL}{2} - 0}{E \times \frac{bh^3}{12}}$$

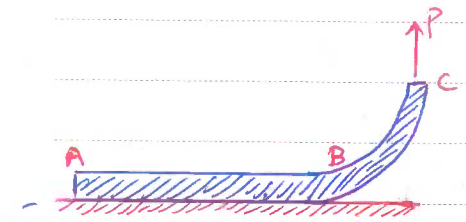
$$\Rightarrow \boxed{P = \frac{Ebh^3}{6LR_1}}$$

PAPCO

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

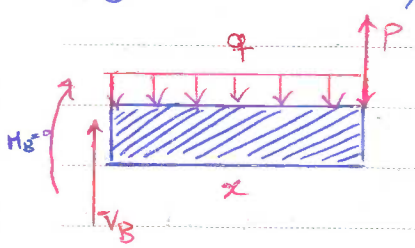
Subject: Mostafa Rahimi
Year. Month. Date. ( )

نکته جالب سؤال: در شکل زیر وزن واحد طول q است. شعاع انحنای میله در B چقدر است؟ چه طولی از این تیر تحت نیروی P از روی زمین بلند می‌شود؟



حل) چون تیر پیوسته است شعاع انحنای آن در B در سمت چپ و راست B برابر است. سمت چپ B به صورت خط راست است یعنی شعاع انحنای آن بی‌نهایت است پس شعاع انحنا در B بی‌نهایت است.

$$\rho_B = \infty \Rightarrow \frac{1}{\rho_B} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \boxed{M_B = 0}$$

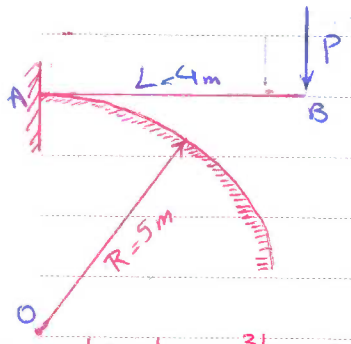


$$\Sigma M_B = 0 \Rightarrow Px = \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2P}{q}}$$

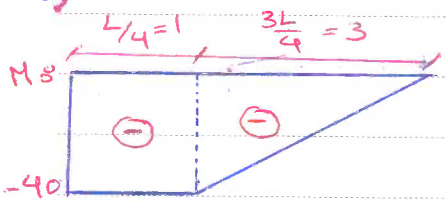
مقدار طولی که از روی زمین بلند می‌شود.

نکته جالب سؤال: تحت بار P، 1/4 طول تیر روی سطح دایره‌ای قرار می‌گیرد. نمودار لنگر خمشی؟ مقدار نیروی P؟

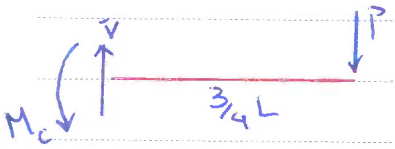
$(EI = 200\ t.m^2)$



حل) $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow M = \frac{EI}{\rho} = \frac{200}{-5} = \boxed{-40\ t.m}$



یعنی تا طولی که روی دایره‌ای است لنگر خمشی ثابت است و بعد از آن به صورت تیر کنسولی کاهش می‌یابد.



$$M_c = \frac{3}{4}PL = \frac{3}{4} \times P \times 4 = 3P$$

$$3P = 40 \Rightarrow \boxed{P = 40/3}$$

PAPCO

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

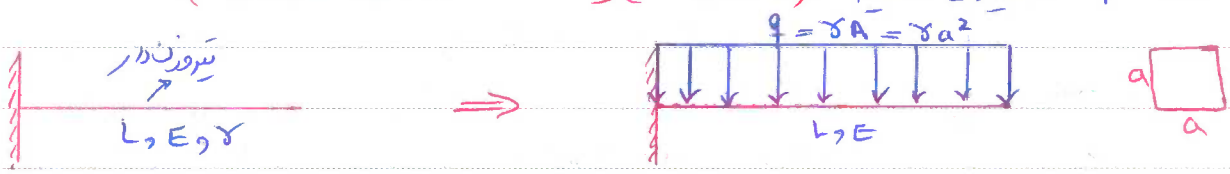
نکته جالب:

در این حالت چون لنگر خمشی در تمامی طول تیر ثابت است پس انحنا ثابت است پس تغییر شکل به صورت دایره خواهد بود.

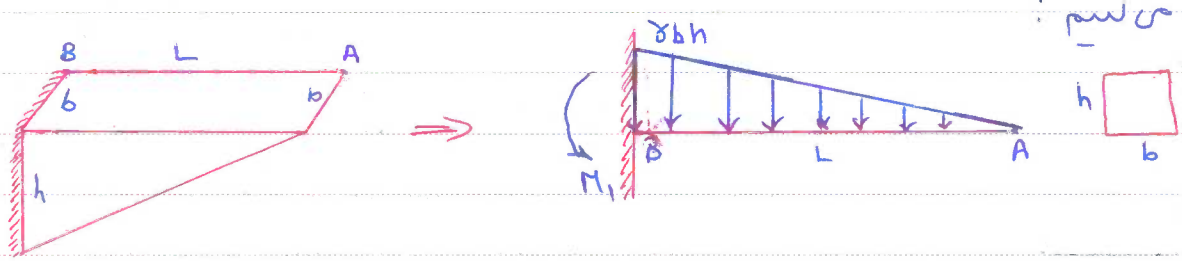
نکته واقعاً مهم: اگر لنگر خمشی در راستای یکی از محورهای اصلی مقطع اثر کرده باشد، محور خمش و محور خمش بر یکدیگر منطبق می‌شوند.

نکته بسیار کاربردی:

در مسائلی که تیر تحت اثر وزن خود قرار دارد آن را با یک تیر بدون وزن تحت بار گسترده $q = \gamma A$ جایگزین می‌کنیم. (A سطح مقطع تیر — γ وزن مخصوص تیر)



در این شرایط اگر تیر ما صاف نبود و مقطع تغییر می‌کرد از بار گسترده شیب دار استفاده می‌کنیم:



PAPCO

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

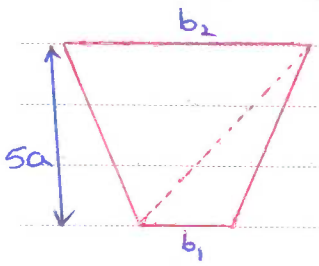
تذکر: وقتی مقطع نامتقارن داریم اساس مقطع کششی با فشاری دیگه برابر نیست در حل مسائل باید دو تا رو هم کششی و هم فشاری را حساب کنیم و Min این دو تا ظرفیت خمشی مقطع را می‌شود.

دقت مهم: اگر در سؤال ذکر شد که حالت بهینه مقطع را بیابید باید تنش‌های فشاری حداکثر تنش‌های کششی حداکثر همزمان به مقدار مجاز برسند

یعنی

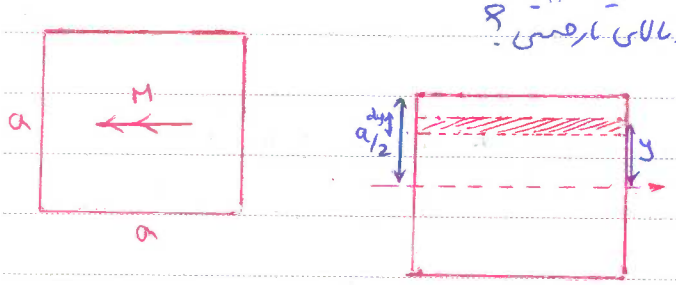
$$\boxed{M_{\text{فشاری}} = M_{\text{کششی}}}$$

راه حل جالب: در مقطع نامتقارن برای پیدا کردن $\bar{y}$ راه حل زیر جالبه (تبدیل به دو مثلث)



$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2} \times b_2 \times 5a \times \frac{10}{3}a + \frac{1}{2} b_1 \times 5a \times \frac{5}{3}a}{\frac{1}{2} \times b_2 \times 5a + \frac{1}{2} b_1 \times 5a} = \ldots$$

سؤال خوب: میزان تغییر ارتفاع مقطع روبرو بالای تار خنثی؟



$$\epsilon_y = -\nu \epsilon_z = \nu \frac{My}{EI}$$

$$dh = \epsilon_y dy = \nu \frac{My}{EI} dy$$

$$\Delta h = \int_0^{a/2} dh = \ldots$$

راه حل ساده‌تر

$$\begin{cases} y_1 = 0 \Rightarrow \epsilon_{y_1} = \nu \frac{My}{EI} = 0 \\ y_2 = a/2 \Rightarrow \epsilon_{y_2} = \nu \frac{My}{EI} = \frac{\nu M a}{2EI} \end{cases}$$

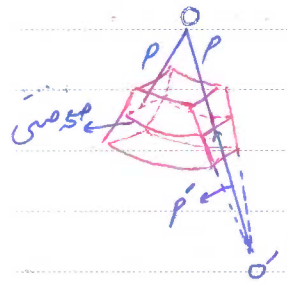
$$\boxed{\bar{\epsilon}_y = \frac{\epsilon_{y_1} + \epsilon_{y_2}}{2}} = \frac{\nu M a}{4EI} \Rightarrow \Delta h = \bar{\epsilon}_y \times h = \frac{\nu M a}{4EI} \times a/2 = \frac{\nu M a^2}{8EI}$$

PAPCO

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته: مرکز انحنا تیر (نقطه o) و مرکز انحنا مقطع عرضی (نقطه o') در دو طرف تیر قرار دارند.



$$\boxed{\frac{1}{\rho'} = \frac{\nu}{\rho}}$$ پواسون

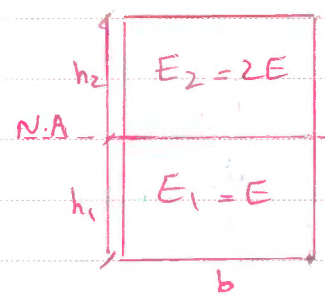
شعاع انحنای مقطع عرضی > شعاع انحنای تیر

** اصل جمع آثار برای انحنای مقطع نه شعاع انحنای مقطع صادق است.

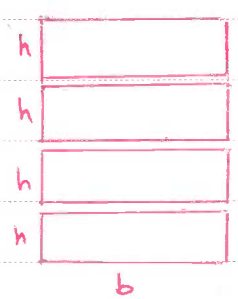
مثلاً اگر انحنا مقطع تحت M_1 برابر $\frac{1}{\rho_1}$ و تحت M_2 برابر $\frac{1}{\rho_2}$ باشد برای لنگر M_1+M_2 انحنای $\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}$ داریم.

نکته مهم: وقتی مقطع غیرهمگن داریم دقت شود کرنش فقط با فاصله از محور خنثی متناسب است و به جنس مقطع ربطی ندارد. فقط تنش است که به E وابسته است.

نکته مهم: برای پیدا کردن محور خنثی در حالت خمش خالص، ممان استاتیک ($A\bar{y}$) حول محور خنثی صفر است یعنی:



$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow \boxed{n_1 A_1 \bar{y}_1 = n_2 A_2 \bar{y}_2}$$



نکته سی: اگر n تیر مشابه با ابعاد یکسان روی یکدیگر قرار داشته باشند و با چسب به یکدیگر بچسبانیم خیز حداکثر $\frac{1}{n^2}$ برابر می‌شود.

مهم

PAPCO

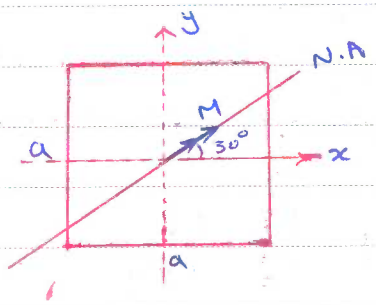
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

بدست آوردن محل تار خنثی در خمش دو محوره :

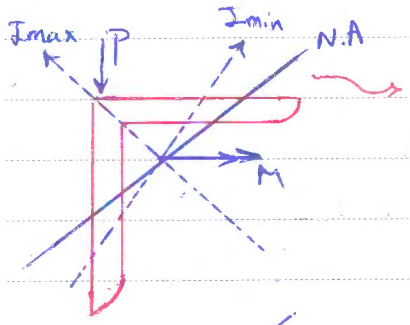
در تار خنثی $\rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \dfrac{(M\cos\theta)\,y}{I_x} - \dfrac{(M\sin\theta)\,x}{I_y} = 0 \Rightarrow \boxed{y = \left(\dfrac{I_x}{I_y}\,tg\theta\right)x}$

نکات مهم :

1. محور خنثی در خمش دو محوره همواره بین محور خمش و محور ضعیف قرار می‌گیرد
2. اگر $I_x = I_y \longrightarrow \theta = \phi \longrightarrow$ محور خمش منطبق بر محور خنثی $\longrightarrow$ خمش تک محوره
3. در n ضلعی منتظم تمام محورهای مقطع محور اصلی اند
   همواره محور خنثی بر محور خمش منطبق است



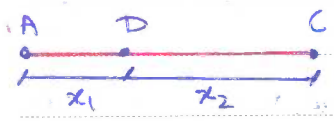
جالب در شکل زیر به جایگاه محور خنثی توجه شود :



بین محور ضعیف و محور خمش

نکته : اگر نیروی محوری هم داشته باشیم محور خنثی از مرکز سطح عبور نمی‌کند

نکته واقعاً مهم : برای محاسبه کرنش در نقطه‌ای دلخواه داریم :



$$\boxed{\epsilon_D = \frac{x_2\,\epsilon_A + x_1\,\epsilon_C}{x_1 + x_2}}$$

PAPCO

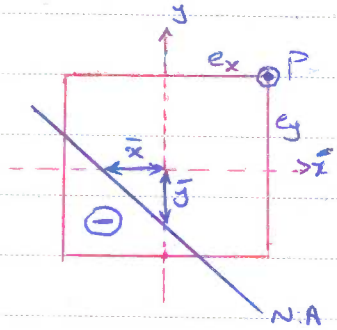
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته سوال: اگر در سوال گفته بود که معادله‌ی کرنش را بدست بیاورید. چون تغییرات کرنش خطی است آن را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

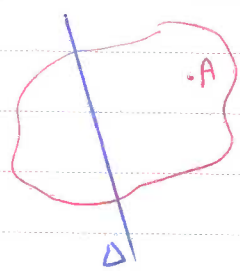
$$\boxed{\epsilon(x,y) = ax + by + c}$$

حال با قرار دادن نقاط مرزی و کرنش های آن ها مقادیر a و b و c را بدست می آوریم



نکته مهم: وقتی با بردن محور داریم خروج از مرکزیت نیرو و محور خنثی لزوماً در طرفین آن محور رخ می دهد.
محور خنثی و نیروی P در طرفین مرکز سطح قرار می گیرند
اگر خروج از مرکزیت به صفر نزدیک شود $\bar{y}$ به بی نهایت میل دارد

$$\boxed{\bar{x} = \left| -\frac{I_y}{Ae_x} \right| \qquad \bar{y} = \left| -\frac{I_x}{Ae_y} \right|}$$



قضیه بوجا به نیرو - محور خنثی:
اگر نیروی محوری در نقطه دلخواه A اثر کند و محور خنثای متناظر آن خط Δ باشد، چنانچه متقابلاً نیروی محوری در هر نقطه‌ای از خط Δ اثر کند، محور خنثی متناظر آن از نقطه A خواهد گذشت.

نکته کاربردی: رابطه $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ فقط برای حالت الاستیک صادق است. اگر حالت الاستیک نبود و مثلاً $\sigma = E\epsilon^n$ بود داریم:

$$M = M_1 + M_2 \Rightarrow \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \Rightarrow E\epsilon^n = E\epsilon_1^n + E\epsilon_2^n$$

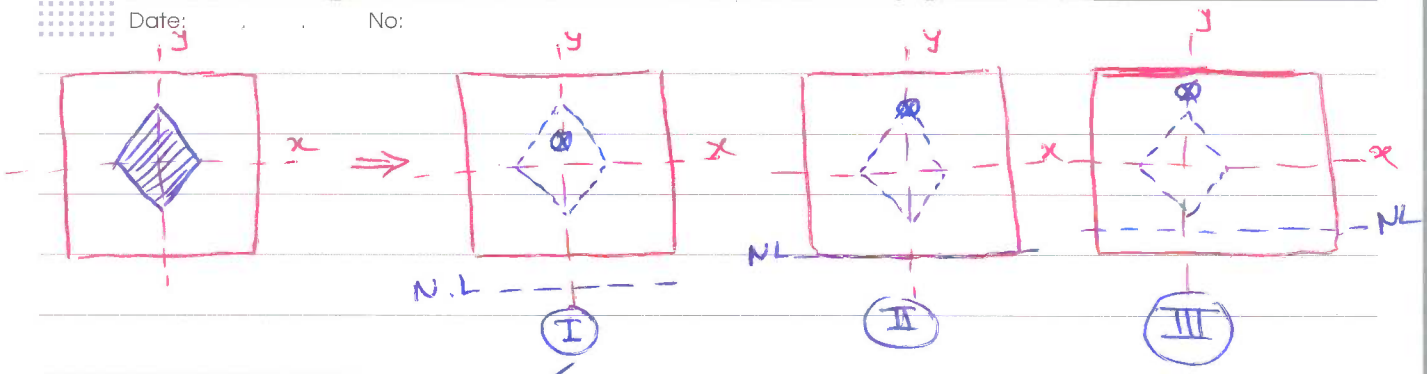
در حالت غیر الاستیک $\longleftrightarrow$ $\boxed{\left(\frac{1}{\rho}\right)^n = \left(\frac{1}{\rho_1}\right)^n + \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^n}$

نکته مهم: با K برابر شدن بار گذاری
- در حالت الاستیک $\longleftarrow$ شعاع انحنای جدید $\frac{\rho}{K}$
- پلاستیک $\longleftarrow$ 〃 〃 〃 $\frac{\rho}{\sqrt[n]{K}}$

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: Mostafa Rahimi

Date: . . No:

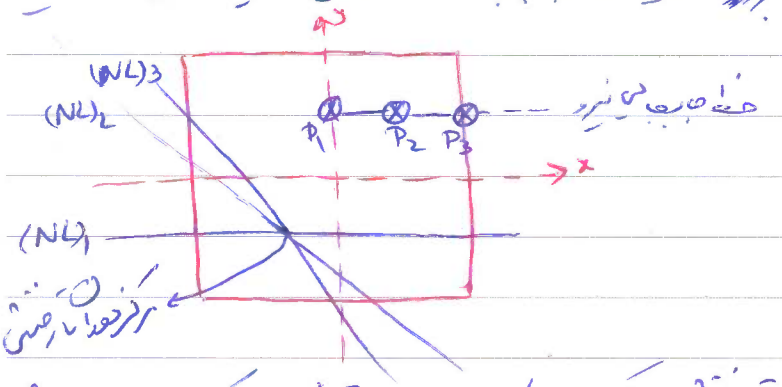


I) نیروی P داخل هسته مقطع ≡ تار خنثی مقطع را قطع نمی‌کند ≡ همه نقاط مقطع تحت فشار قرار دارند

II) نیروی P روی مرزهای هسته ≡ تار خنثی بر مرزها قرار می‌گیرد ≡ همه نقاط مقطع تحت فشار قرار دارند

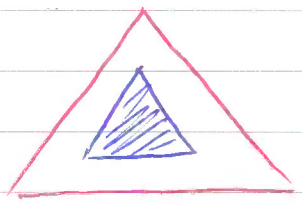
III) نیروی P خارج از هسته ≡ تار خنثی مقطع را قطع می‌کند ≡ تنها قسمتی از نقاط مقطع تحت فشار قرار دارند

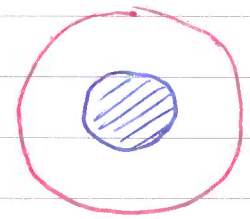
نکته جالب: اگر در یک مقطع نیروی محوری بر روی یک خط جابه‌جا شود تار خنثی در این حالت حول یک نقطه متحرک دوران می‌کند و بالعکس.



برای بدست آوردن هسته‌ی یک مقطع تار خنثی را یک دور کامل روی مقطع مماس کرده و محل اثر بار P را بدست می‌آوریم. از وصل کردن این نقاط به یکدیگر مرزهای هسته‌ی مرکزی ایجاد می‌شود

هسته‌ی مرکزی یک n ضلعی محدب کوچکتر از مقطع بوده و همچنین اگر مقطع محل یک محور یا مرکز تقارن باشد هسته مرکزی آن نیز محل همان محور یا مرکز تقارن است





PONIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

فصل پنجم: بارگذاری عرضی (برش):

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

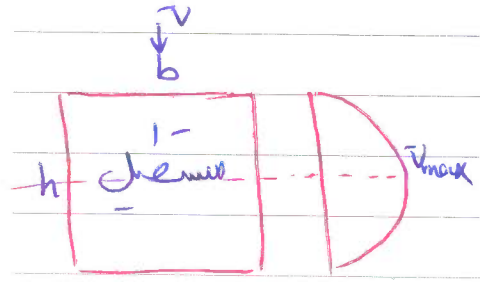
$Q = A\bar{y}$ → مساحت بالای محور خنثی

t → ضخامت نقطه‌ای که داریم بررسی می‌کنیم

I → ممان اینرسی کل مقطع

* برش برخلاف خمش و پیچش در وسط تیر حداکثر است !!

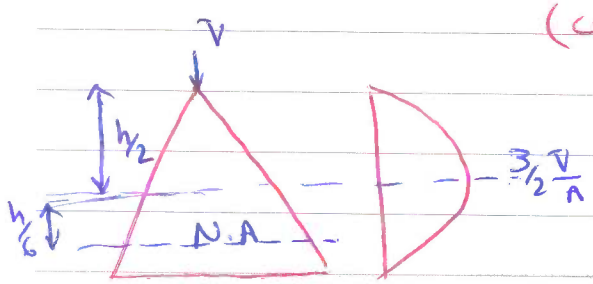
نتایج مهم:



$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh} = \boxed{\frac{3}{2}\frac{V}{A}}$$

τ_{max} در وسط مستطیل اتفاق می‌افتد. (روی تار خنثی)

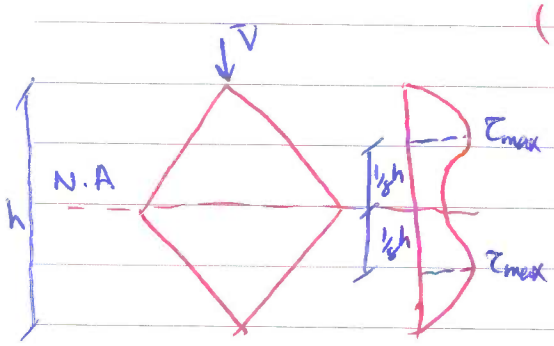
مثلث:



$$\boxed{\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}}$$

τ_{max} در وسط مثلث اتفاق می‌افتد (روی تار خنثی نیست !!)

لوزی:



$$\boxed{\tau_{max} = \frac{9}{8}\frac{V}{A}}$$

τ_{max} در $\frac{1}{8}h$ اتفاق می‌افتد.

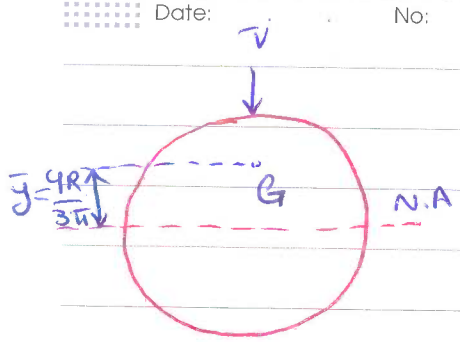
PONIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

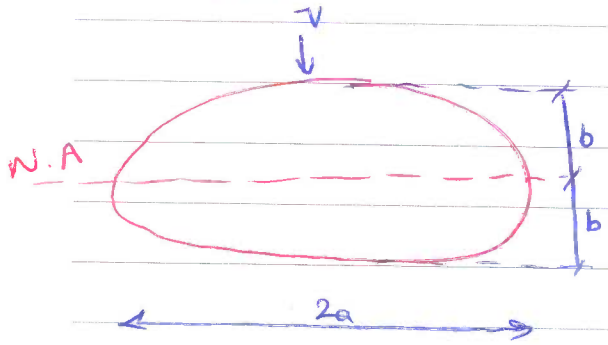
دایره :



$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$$

τ_{max} در محل تار خنثی رخ می دهد.

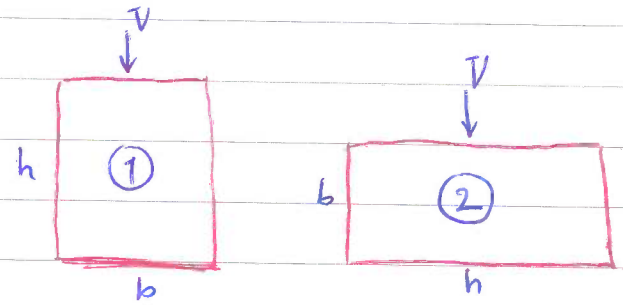
بیضی :



$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi ab}$$

τ_{max} در محل تار خنثی رخ می دهد

نکته: در صورتی که مقطع مستطیلی 90 درجه بچرخد تنش برشی حداکثر و مقاومت برشی مقطع تغییر نمی کند.



$$\tau_{max_1} = \tau_{max_2} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh}$$

* در دو مقطع هم جنس مقاومت برشی با تنش برشی حداکثر رابطه عکس دارد:

$$\frac{\text{مقاومت برشی مقطع (1)}}{\text{مقاومت برشی مقطع (2)}} = \frac{\tau_{max_2}}{\tau_{max_1}}$$

یعنی اگر دو تا چوب را تک تک بگذاریم یا به هم بچسبانیم و یکی حساب کنیم نسبت مقاومت ها تغییری نمی کند چون جنس یکی است.

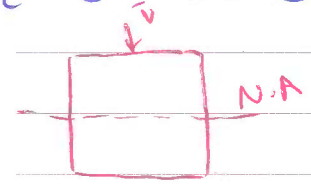
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

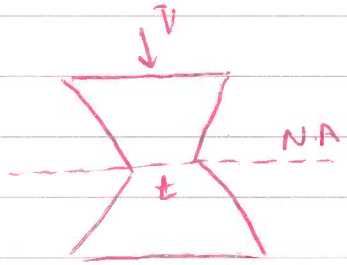
Date: No:

نکته مهم: اگر ضخامت در طول یک مقطع ثابت باشد، تنش ماکزیمم برشی در محل تار خنثی مقطع رخ می‌دهد.



$$\tau_{max} = \frac{VQ_{max}}{It} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$$

اگر با نزدیک شدن به محور خنثی ضخامت مقطع کاهش یابد پس در محور خنثی دوباره ماکزیمم تنش برشی رخ می‌دهد.

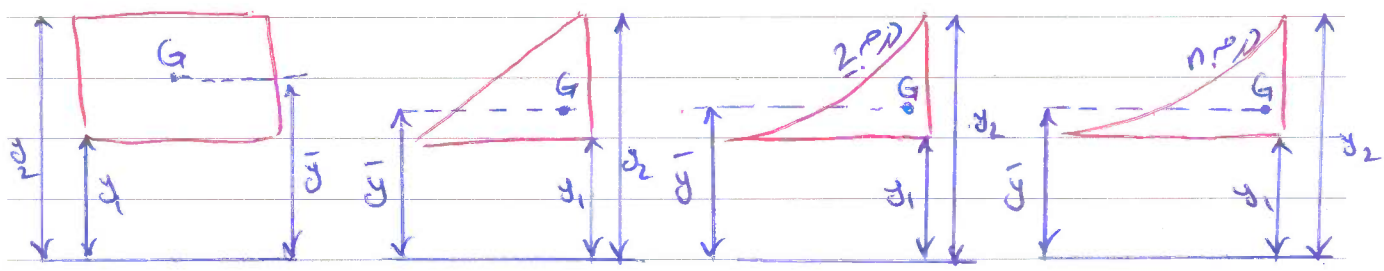


$$\left(\frac{Q}{t}\right)_{max} \Rightarrow \tau_{max} = \frac{V}{I}\left(\frac{Q_{max}}{t}\right)$$

در این حالت $\longrightarrow$ $\boxed{\tau_{max} > \frac{3}{2}\frac{V}{A}}$ $\longrightarrow$ جالب

در مقاطعی که کمترین ضخامت در محل تار خنثی رخ نمی‌دهد، تنش برشی ماکزیمم ممکن است در محل محور خنثی رخ ندهد.

نکته کاربردی برای بدست آوردن $\bar{y}$:



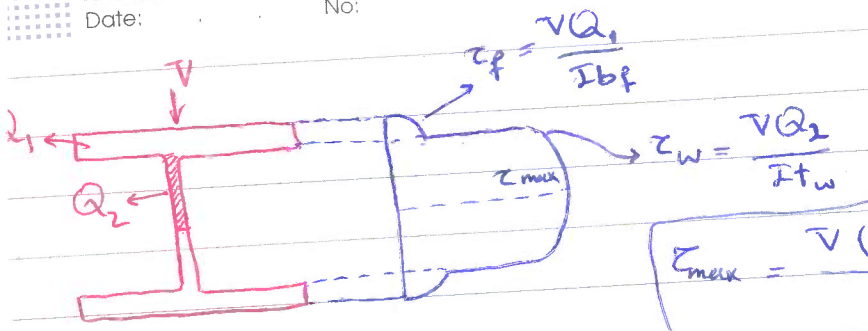
$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad \bar{y} = \frac{2y_1 + y_2}{3} \qquad \bar{y} = \frac{3y_1 + y_2}{4} \qquad \bar{y} = \frac{(n+1)y_1 + y_2}{(n+2)}$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

برش در I شکل:



$$\tau_f = \frac{VQ_1}{Ib_f}$$

$$\tau_w = \frac{VQ_2}{It_w}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{V(Q_1+Q_2)}{It_w}}$$

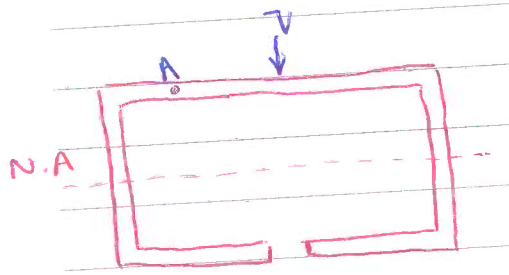
تنش برشی قائم در بال های مقطع مقدار کمی داشته و بال های مقطع برش کمی را تحمل می کنند. از طرفی وجود بال ها باعث یکنواخت تر شدن تنش برشی بر روی جان مقطع می شود.
تنش اصلی بال ها، تحمل لنگر خمشی وارد بر مقطع می باشد.
وظیفه اصلی جان مقطع، یکپارچه کردن مقطع و انتقال دو بال به یکدیگر برای تحمل لنگر خمشی می باشد.

نکته: اگر یک مقطع در هم درهمی را دارند و تنش برشی ماکزیمم را خواستند باید نسبت $\frac{Q}{t}$ را در همه جای مقطع حساب کنیم تا ببینیم در کجا این نسبت ماکزیمم می شود.

نیروی برشی در واحد طول:

$$q = \tau \times t = \frac{VQ}{It} \times t = \boxed{\frac{VQ}{I}}$$

تنش برشی در مقاطع جدار نازک:



① تنش برشی قائم (عمود بر جداره):

در این حالت چون عرض مقطع نسبت به ضخامت ناچیز بوده سهم از آن صرف نظر می شود.

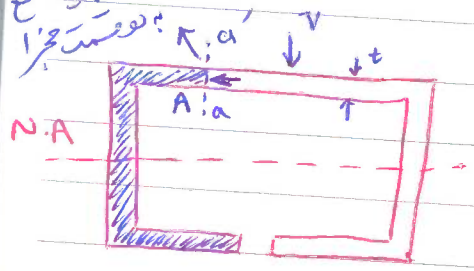
پس در مقاطع جدار نازک فقط تنش برشی افقی برای ما مهم است

مهم →

Subject:

Date: No:

برش برای تبدیل مقطع به دو قسمت مجزا



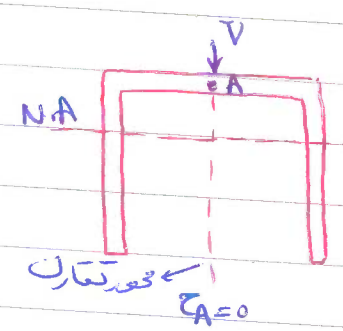
② تنش برشی افقی (به صورت جداره ۲ :

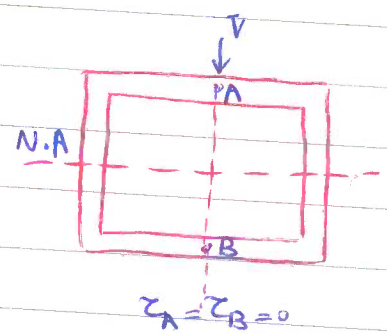
برشی را در نقطه مورد نظر می‌زنیم تا مقطع را به دو قسمت مجزا تقسیم کند در این شرایط $t = aa'$ است و برای محاسبه Q قسمت هاشور خورده نسبت محور خنثی را حساب می‌کنیم.

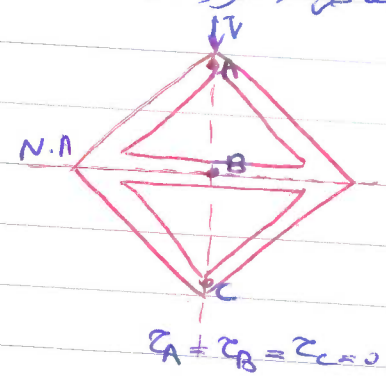
$$\tau_A = \frac{VQ}{It}$$

فرقی نمی‌کند کدام طرف مقطع aa' را برای محاسبه‌ی Q در نظر بگیریم.

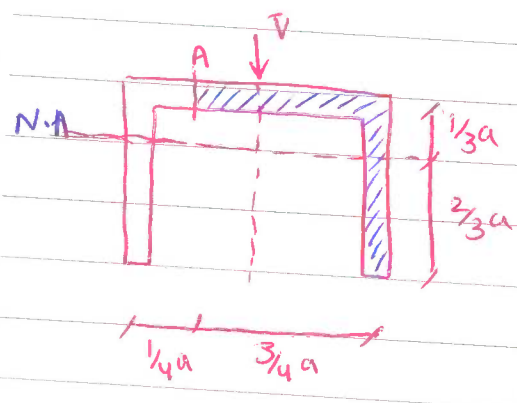
نکته: اگر یک مقطع جدار نازک دارای محور تقارن باشد و نیروی برشی در راستای آن محور تقارن اثر کند در تقاطع که محور تقارن، مقطع را قطع می‌کند، تنش برشی برابر صفر است.







مثال:



چون جدار نازک است ← تنش برشی قائم = ۰

پس برای محاسبه‌ی Q افقی باید برای قسمت هاشور خورده را حساب کنیم:

$$Q = Q_{\text{افقی}} + Q_{\text{قائم}} = A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2$$

$$Q = \left(\frac{3}{4}at\right)\times\left(\frac{1}{3}a\right) + (at)\times\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}a\right)$$
$$= \frac{1}{12}a^2t$$

$$\Rightarrow \tau_A = \frac{VQ}{It} = \frac{V\times\left(\frac{1}{12}a^2t\right)}{\frac{1}{3}ta^3\times t} = \boxed{\frac{1}{4}\frac{V}{at}}$$

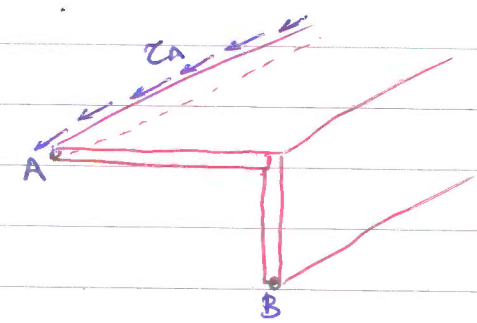
PONIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

حواس جمع: در مثال قبل چون مرکز سطح سمت قائم زیر محور خنثی بود، همان استاتیک آن را منفی گرفتیم.

ایده‌های حل سوال برش:

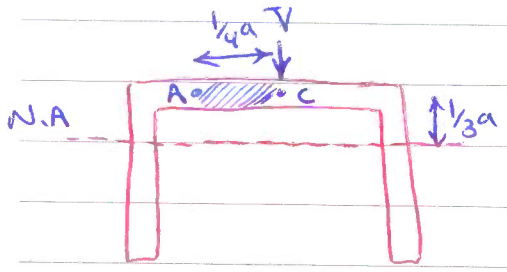


ایده ①: در این ایده می‌توان جریان برش را در نظر گرفت. در این حالت می‌نویسیم:

$$\tau_A \times t + \tau_B \times t = \frac{VQ}{I} \quad , \quad (\tau_B = 0) \Rightarrow \tau_A = \frac{VQ}{It}$$

چون سطح آزاد تنش است

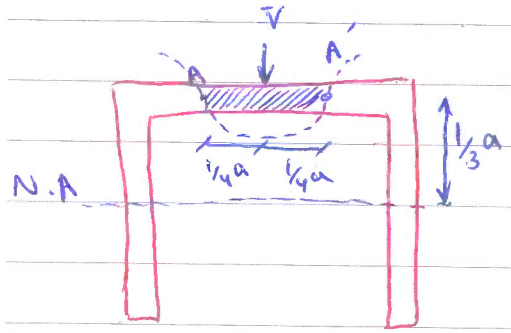
ایده ②: برای محاسبه‌ی تنش برشی در A، می‌توان ابتدا نقاط با تنش برشی صفر را در مقطع مشخص کرد و سپس با برش در مقطع، سمت‌ها شود خورده را طوری در نظر گرفت که در یک سمت آن نقطه تنش برشی صفر و در سمت دیگر نقطه A قرار داشته باشد.



$$\tau_A \times t + \tau_C \times t = \frac{VQ'}{I}$$

$\tau_C = 0$

$$\Rightarrow \tau_A = \frac{VQ'}{It} = \frac{V \times (\frac{a}{4} t \times \frac{1}{3}a)}{(\frac{1}{3} t a^3) \times t} = \boxed{\frac{1}{4}\frac{V}{at}}$$



ایده ③: با یک خط چین نقطه A را به متقارنش A' وصل می‌کنیم چون A' قرینه A است پس تنش برشی در آن‌ها با یکدیگر برابر است.

$$\tau_A \times t + \tau_{A'} \times t = \frac{VQ''}{I}$$

$$\tau_A = \tau_{A'} \quad , \quad Q'' = (\tfrac{1}{2}at) \times \tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{6}a^2 t$$

$$\Rightarrow 2\tau_A \times t = \frac{VQ''}{I} \Rightarrow \left(\tau_A = \tfrac{1}{4}\frac{V}{at}\right)$$

لایک

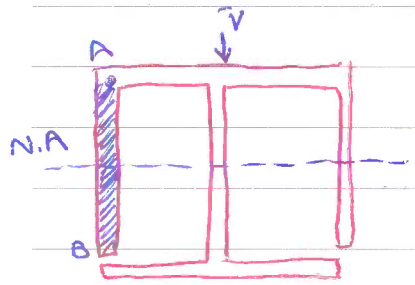
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

سوال: در چه نقاطی تنش برشی صفر می‌شود؟؟

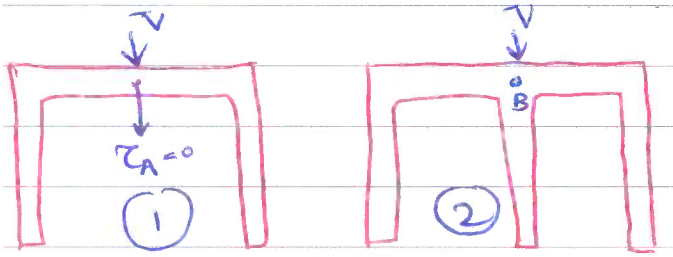


1) نقاطی مانند B که سطح آزاد تنش هستند

2) نقاطی مانند A، که مهمان استاتیک سطح هاشور خورده حول محور خنثی صفر است.

3) در محل برخورد مقطع با محور تقارن مقطع که برش در امتداد آن است در مواردی که هیچ عضوی از مقطع در راستای محور تقارن قرار نداشته باشد. (مهم)

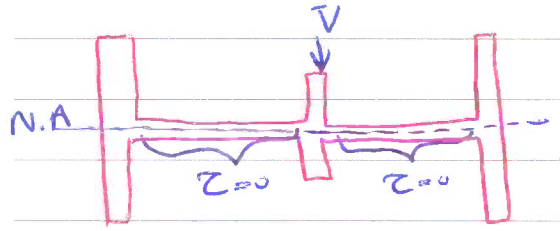
مثال



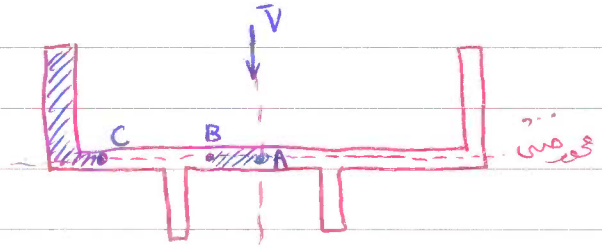
در نقطه A ← $\tau_A = 0$

در نقطه B ← تنش برشی B تعریف نمی‌شود چون یک عضو زیر آن است.

نکته مهم: در مقطع جدار نازک اگر محور تقارن محور خنثی باشد، تنش برشی بر روی آن جدار صفر است.



جواب جمع: در شکل روبرو:



تنش برشی در نقاط A و B صفر است چون Q_{AB} صفر است.

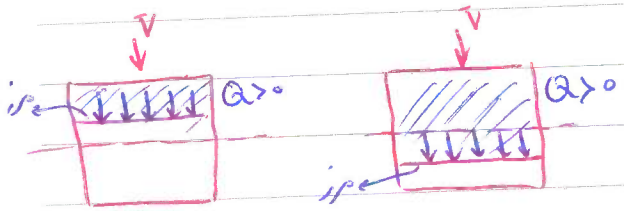
اما تنش برشی در نقطه C صفر نیست چون $Q_C \neq 0$

PENIX NOTE BOOK

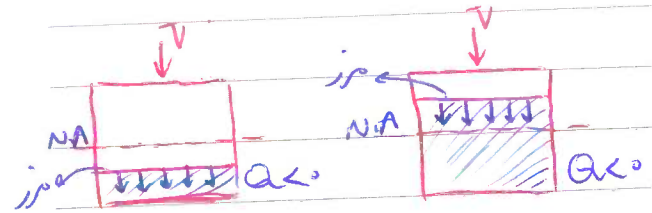
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

ترسیم جریان برش در مقاطع جدار نازک :

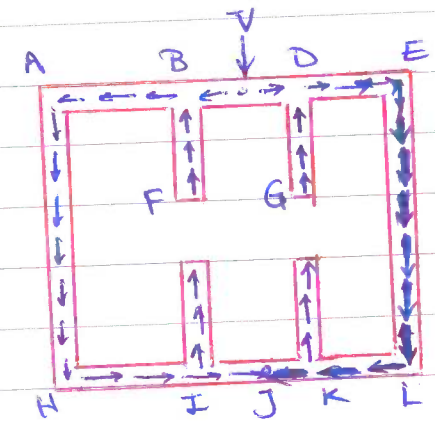


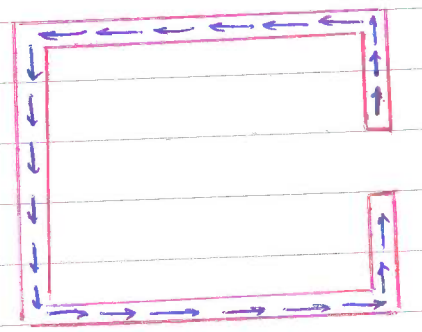
① اگر ممان استاتیک سطح جدا شده (+) باشد جریان برش به صورت عمود بر سطح مورد نظر به مرز آن نزدیک می شود.



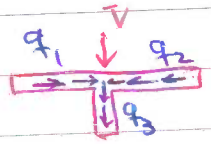
② در صورتی که ممان استاتیک سطح جدا شده نسبت به تار خنثی (−) باشد، جریان برش به صورت عمود بر سطح مورد نظر از مرز آن دور می شود.

دو شکل جریان مهم :





اصل پیوستگی جریان برش :



جریان برش ورودی = جریان برش خروجی $\Rightarrow q_1 + q_2 = q_3 \Rightarrow \boxed{\tau_1 t_1 + \tau_2 t_2 = \tau_3 t_3}$

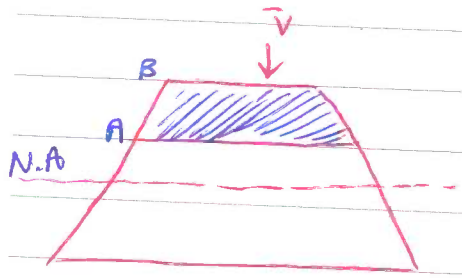
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

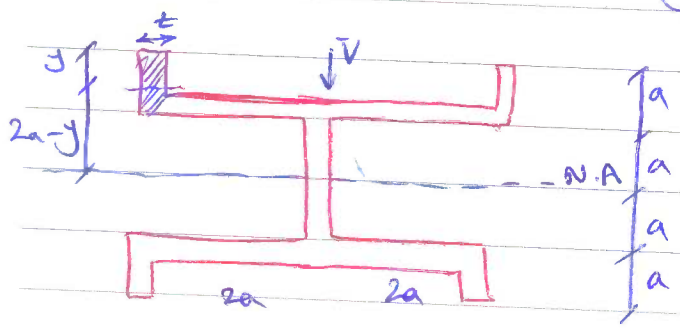
Date: No:

محاسبه ی نیروی برشی تحمل شده در قسمتی از یک مقطع :



$$dF = \tau\, dA = \tau \times (t \times dy)$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \int_{y_A}^{y_B} \tau \times t \times dy}$$



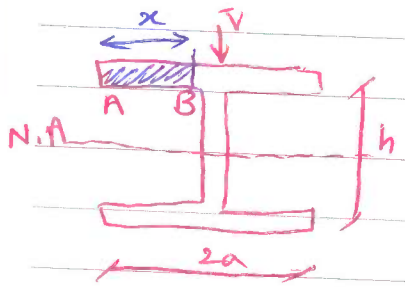
مثال :

مثلا در شکل روبرو برای بدست آوردن نیروی وارد بر قسمت هاشور خورده نمی توان به جای τ در فرمول $\tau = \frac{VQ}{It}$ از $\frac{F}{A}$ استفاده کرد و باید انتگرال گیری کنیم.

$$dF = \tau(y)\, dA = \tau(y) \times t \times dy$$

$$\Rightarrow F = \int_0^a \frac{VQ(y)}{It} \times t \times dy = \frac{V}{I} \int_0^a Q(y)\, dy$$

$$\Rightarrow F = \frac{V}{I} \int_0^a (y \times t) \times (2a - y/2)\, dy = \frac{V}{I}\left[\frac{5}{6} a^3 t\right]$$



حالت خاص :

در مواردی که نیروی یک عضو مثل AB را از بین خواستند، چون تغییرات تنش برشی خطی است می توان میانگین تنش ها را استفاده کرد.

* در شرایطی تنش برشی خطی است که عضو موازی با محور خنثی باشد. (مهم)

$$F_{AB} = \tau_{ave} \times A = \frac{\tau_A + \tau_B}{2} A_{AB} = \frac{\tau_B}{2} A_{AB} \longrightarrow \frac{VQ}{It} = \frac{V \times (xt) \times h/2}{It}$$

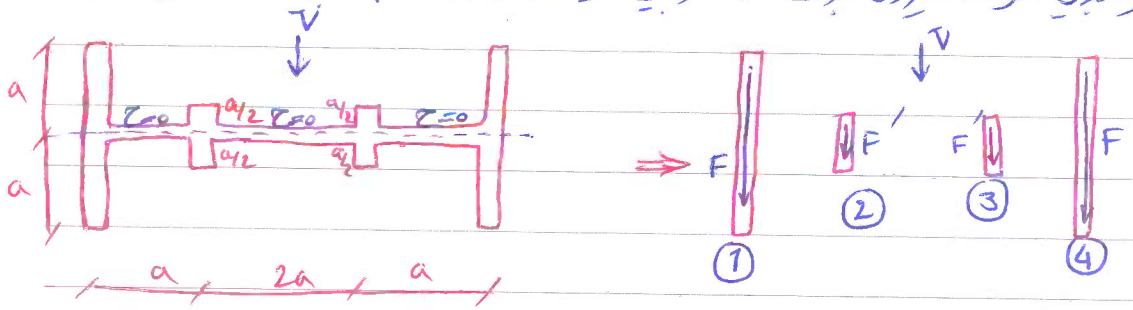
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

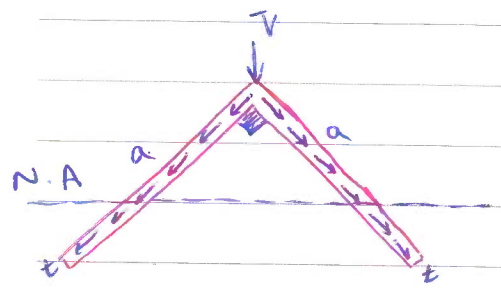
حالت خاص ② : اگر در یک مقطع جدار نازک پس از مشخص کردن نقاط با تنش برشی صفر، مقطع به چند قسمت مجزا تبدیل شود، نیروی برشی V در بین این قسمت ها به نسبت ممان اینرسی تقسیم می شود.



$$\begin{cases} I_2 = I_3 = \dfrac{ta^3}{12} = I \\ I_1 = I_4 = \dfrac{t(2a)^3}{12} = 8I \end{cases} , \quad \begin{cases} F_2 = F_3 = F' \\ F_1 = F_4 = F \end{cases} \Rightarrow \boxed{F = 8F'}$$

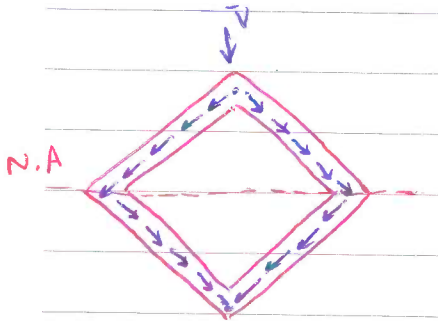
$$\Rightarrow 2F + 2F' = V \Rightarrow 2F' + 2(8F') = V \Rightarrow F' = \frac{1}{18}V$$

حالت خاص ③ :



چون تقارن داریم نیروی دو قطعه با هم برابر است پس داریم:

$$2F\cos 45^\circ = V \Rightarrow \boxed{F = \frac{\sqrt{2}}{2}V}$$



$$4F\cos 45^\circ = V \Rightarrow \boxed{F = \frac{\sqrt{2}}{4}V}$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

مرکز برش:

نقطه‌ای که با اعمال بارگذاری در آن نقطه در مقطع لنگر پیچشی ایجاد نمی‌شود.

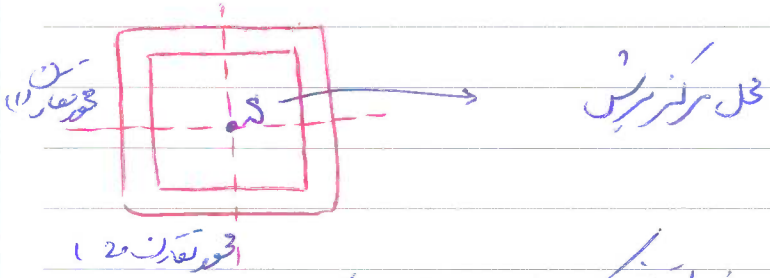
نکته مهم: در صورتی که نیروی برشی در مرکز برش وارد نشود، برای محاسبه‌ی تنش برشی نمی‌توان از رابطه‌ی $\tau = \frac{VQ}{It}$ استفاده کرد.

نکات مرکز برش:

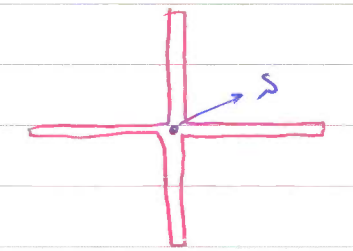
1. محل مرکز برش از مقدار بارگذاری وارد بر مقطع مستقل است. یعنی محل مرکز برش مانند مرکز سطح از خواص مقطع است.

2. در مقاطع با یک محور تقارن مرکز برش نیز روی آن محور تقارن قرار دارد.

3. در صورتی که مقطعی دارای دو محور تقارن باشد، مرکز برش و مرکز سطح بر یکدیگر منطبق بوده که در محل تقاطع دو محور تقارن واقع می‌شوند.



4. اگر مقطعی از اتصال چند قطعه همرس در یک نقطه تشکیل شده باشد، مرکز برش در محل اتصال قطعات به یکدیگر قرار دارد.



صلیبی

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: Mostafa Rahimi

Date: . . No:

چگونه مرکز برش را بدست آوریم؟؟

ابتدا تمامی نیروهای اعضا را بدست می آوریم (به روش انتگرال گیری و ...) البته به تقارن بودن مقطع دقت می کنیم اگر متقارن بود نیروها متقارن هستند. سپس حول مرکز برش لنگر می گیریم و محل آن را تعیین می کنیم.

نکته کم اهمیت: برای مقاطعی که از اعضای افقی و یک جان عمودی (یا بالعکس) تشکیل شده اند، می توان فاصله ی مرکز برش از مبدا مورد نظر را از رابطه زیر بدست آورد:

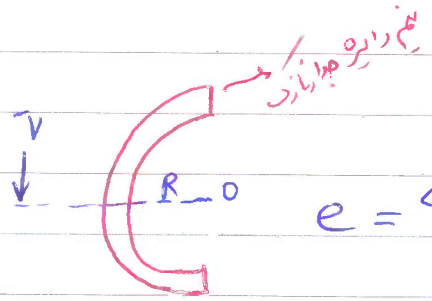
$$\boxed{e = \frac{\sum I_i \cdot \bar{x}_i}{\sum I_i}}$$

I_i : ممان اینرسی المان i ام نسبت به محور خنثی کل مقطع

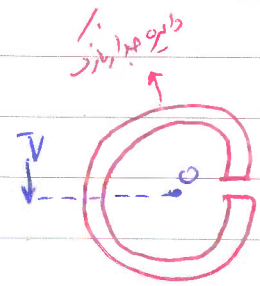
$\bar{x}_i$: فاصله افقی (یا عمودی) مرکز سطح المان i ام از مبدا مورد نظر

دقت: همیشه جهت جریان برش جهت نیروها را برای ما مشخص می کند. در کشیدن جریان برش دقت کنید.

مقاطع دایره ای جدار نازک:



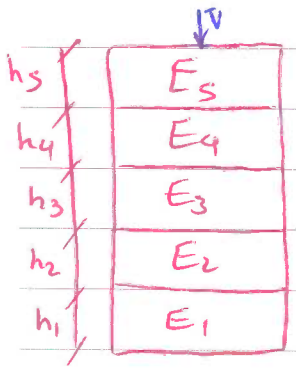
$$e = \frac{4R}{\pi}$$



$$e = 2R$$

تنش برشی در مقاطع غیر همگن:

یک ماده را مبنا قرار می دهیم و مقادیر زیر را حساب می کنیم:



$$\boxed{n_i = \frac{E_i}{E_0}} \quad , \quad \bar{I} = \sum n_i \bar{I}_i = n_1 I_1 + n_2 I_2 + \dots$$

$$\bar{Q} = \sum n_i \bar{Q}_i = n_1 Q_1 + n_2 Q_2 + \dots$$

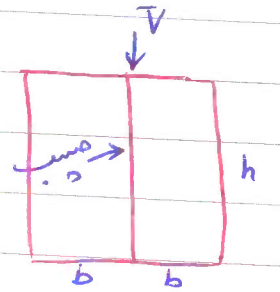
$$\bar{y} = \frac{\sum n_i A_i \bar{y}_i}{\sum n_i A_i} \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{V\bar{Q}}{\bar{I} t}}$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

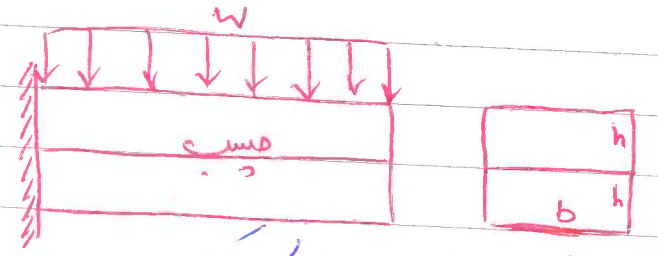
Subject:

Date: . . No:



نکته ۳: اگر در قطعه‌ای مثل قطعه‌ی روبرو که با چسب به هم متصل شده‌اند نیروی V وارد شود، چون تنش برشی افقی صفر می‌باشد نیروی برشی و تنش برشی ایجاد شده در چسب صفر می‌شود

$\tau_{\text{چسب}} = 0$

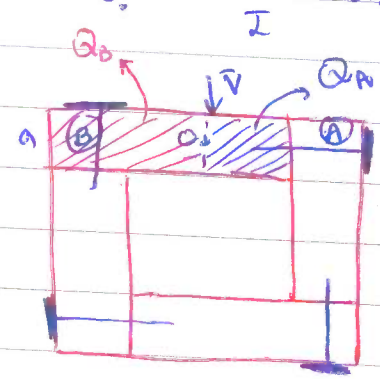


نکته جانب:

برای محاسبه‌ی نیروی برشی تحمل شده در چسب (طول تیر) می‌توان نیروی برشی تحمل شده در عرض dx را محاسبه و سپس با انتگرال‌گیری از ابتدا تا انتهای تیر، کل نیروی تحمل شده توسط چسب را محاسبه کرد.

$$dF = \frac{V(x)\,Q}{I\,b} \times b \times dx = \frac{V(x)\,Q}{I}\,dx = q(x)\,dx$$

$$F = \int_0^L \frac{V(x)\,Q}{I}\,dx = \frac{Q}{I}\int_0^L V(x)\,dx$$



اتصالات برشی با میخ:

در این گونه مسائل جریان برش (q) در هر میخ را به دست آورده و از ضرب جریان برش در فاصله‌ی بین میخ‌ها نیروی را که هر میخ تحمل می‌کند را به دست آورد. در آخر نیروی هر میخ را با مقدار مجاز مقایسه می‌کنیم.

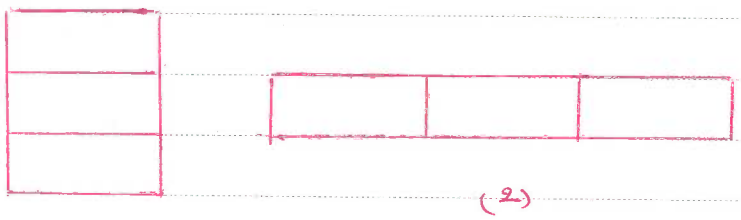
برای محاسبه‌ی Q برای میخ (A) از قسمت هاشور خورده آبی رنگ استفاده می‌کنیم و برای محاسبه‌ی Q میخ (B) از قسمت قرمز رنگ استفاده می‌کنیم.

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Year. Month. Date. ( )

نکته واقعا مهم: چون تنش ماکزیمم برشی در مقاطع مستطیلی از رابطه $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}$ بدست می‌آید
پس اگر مساحت یا برش در مقطع تغییر نکند تنش ماکزیمم برشی تغییری نخواهد کرد
یعنی اگر تعدادی الوار یکسان از نظر جنس و اندازه داشته باشیم چه آن‌ها را روی هم بگذاریم و چه
کنار هم بگذاریم و چه از میخ بین الوارها استفاده کنیم و چه از میخ بین الوارها استفاده نکنیم
در همه ی این حالت مقاومت برشی مجموعه یکسان است



$$\boxed{\tau_1 = \tau_2}$$

تذکر: اگر تعداد الوارها n تا باشد مقاومت برشی n برابر مقاومت برشی یک الوار تک است

PAPCO

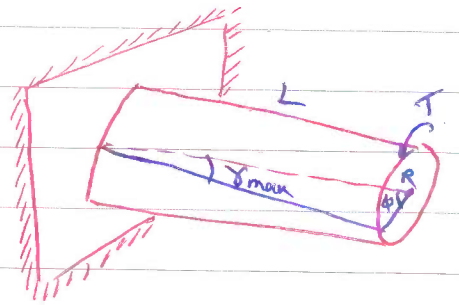
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

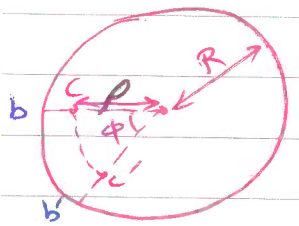
فصل ششم: پیچش:

پیچش در مقاطع دایره‌ای:

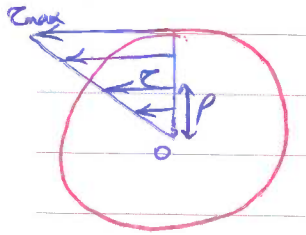


$$\boxed{\gamma_{max} \times L = R \times \phi}$$

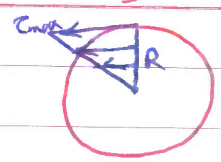
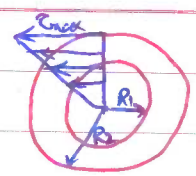
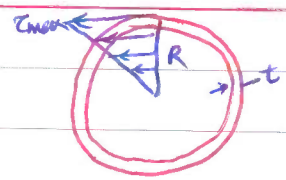
اگر کی‌ان‌های مختلف دایره بود:



$$CC' = \gamma L = \phi \times \rho \Rightarrow \boxed{\gamma_{max} \times L = \rho \phi}$$



$$\begin{cases} \tau = \dfrac{T\rho}{J} \\ \tau_{max} = \dfrac{TR}{J} \\ \gamma_{max} \times G = \tau_{max} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ}}$$

نام مقطع	نمودار توزیع تنش	ممان اینرسی قطبی	تنش برشی حداکثر
دایره توپر		$J = \frac{\pi R^4}{2}$	$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi R^4}{2}} = \frac{2T}{\pi R^3}$
دایره توخالی مدور المرکز		$J = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$	$\tau_{max} = \frac{TR_2}{J} = \frac{2TR_2}{\pi(R_2^4 - R_1^4)}$
دایره جدار نازک		$J = 2\pi R^3 t$ $A = 2\pi R t$	$\tau_{max} = \tau = \frac{TR}{J} = \frac{T}{2\pi R^2 t}$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

نکته: در مقطع هم‌ضخامت تحت اثر لنگر پیچشی یکسان مقطعی که در آن تنش‌های برشی بزرگتری ایجاد می‌شود مقاومت پیچشی کمتری دارد.

تنش برشی بیشتر ← مقاومت کمتر

$$\boxed{\frac{\text{مقاومت پیچشی (1)}}{\text{مقاومت پیچشی (2)}} = \frac{(\tau_{max})_2}{(\tau_{max})_1} = \frac{J_1}{J_2} \times \frac{R_2}{R_1}}$$

تنش برشی در مقاطع غیرهمگن دایره‌ای:

تنش در نقاط مختلف متناسب با ρG می‌باشد (ρ فاصله از مرکز دایره)

برای محاسبه تنش برشی مقطع را نسبت به یکی همگن می‌کنیم:

$$\begin{cases} \tau_j = n_j \times \dfrac{T\rho}{\bar{J}} \\ n_j = \dfrac{G_j}{G_0} \end{cases} \quad , \quad \bar{J} = \sum_{j=1}^{n} n_j J_j$$

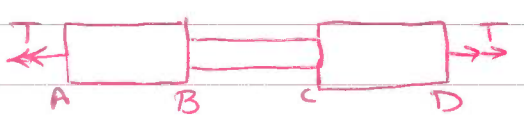
مدول برشی ماده مبنا

ممان اینرسی قطبی کل

در یک مقطع دایره تحت لنگر پیچشی، لنگر به نسبت GJ توزیع می‌شود:

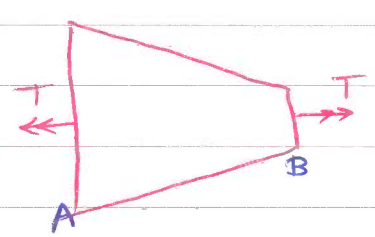
$$\boxed{\frac{T_1}{T_{کل}} = \frac{G_1 J_1}{GJ_{کل}}}$$

محاسبه زاویه پیچش در مقاطع دایره‌ای:



$$\Delta\phi = \phi_D - \phi_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$

اگر سطح مقطع تغییر می‌کرد:



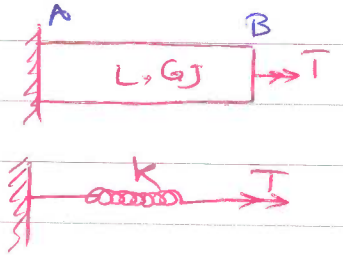
$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = \int_0^L \frac{T}{GJ(x)}\,dx$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:
Date: No:

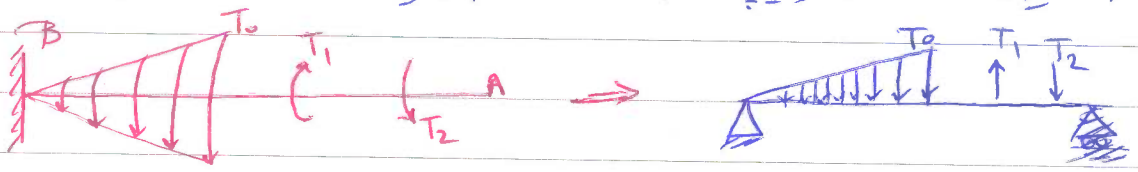
هر میله با طول L و سختی پیچشی GJ که تحت لنگر پیچشی T قرار دارد را می‌توان با فنری به سختی $\frac{GJ}{L}$ جایگزین کرد.



$$\begin{cases} T = \frac{GJ}{L}\phi_B \\ T = k\phi_B \end{cases} \Longrightarrow \boxed{k = \frac{GJ}{L}}$$

روش تشبیه به تیر:

هرگاه در طول یک میله با GJ ثابت، لنگرهای پیچشی خارجی مختلفی اثر کنند، برای به دست آوردن زاویه‌ی پیچش انتهای تیر می‌توان لنگرهای پیچشی را به صورت بار قائم بر تیر اعمال نمود. در ادامه داریم:

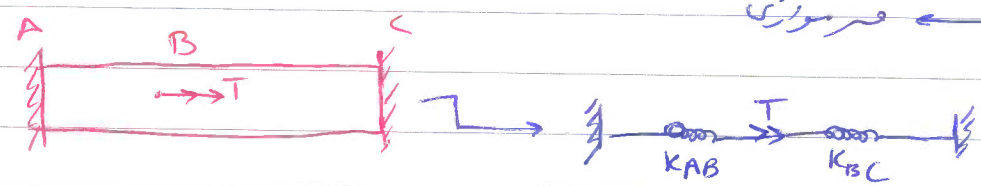


$$(\phi_A)_I = \frac{\Sigma M_B \text{ یا } \Sigma T_B}{GJ}$$

جمع لنگرها حول B (تکیه‌گاه)

حل سازه‌های نامعین:

در این صورت به وسیله‌ی مدلسازی با فنر مسئله را حل می‌کنیم. در محل برخورد دو فنر ϕ آن دو را برابر قرار می‌دهیم ← فنرسازی



$$\boxed{T_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BC} + K_{AB}} T}$$

PONIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

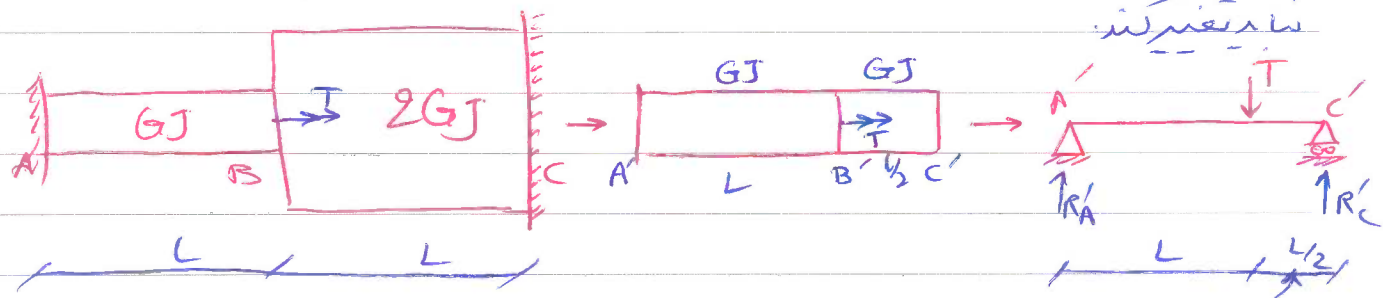
Subject:

Date: . . No:

روش تشبیه به تیر در حل سازه های نامعین :

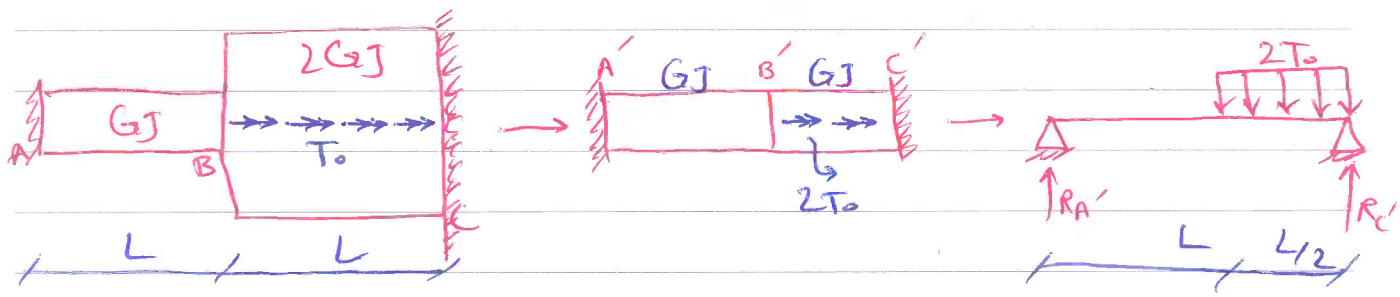
۱) طول اعضا را به گونه ای تغییر می دهیم که سختی در قسمت های مختلف مطلق جدید، با سختی مجموعه ی اول یکسان باشد.

2) در صورتی که طول عضو تحت بارگذاری تغییر کند، کل بارگذاری موثر بر عضو نسبت به حالت اول نباید تغییر کند.



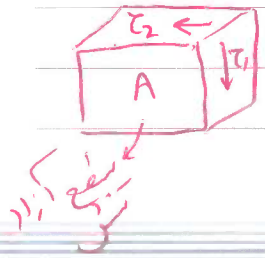
$$K_{BC} = K_{B'C'} \Rightarrow \frac{2GJ}{L} = \frac{GJ}{L_{B'C'}} \Rightarrow \boxed{L_{B'C'} = L/2}$$

اگر بارگذاری گسترده، به شدت ثابت T_0 در طول BC اثر کند؟



دقت: با نصف شدن طول BC، شدت بار آن باید دو برابر شود.

نکته: در حالت پیچش خالص، در مقاطع عرضی و طولی، تغییر سطح و همچنین در امتدادهای طولی و عرضی، تغییر طول ایجاد نشده و در نتیجه کل عضو تغییر حجم به وجود نمی آید.



$$\begin{cases} \epsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \\ \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \epsilon_V = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$$

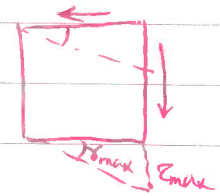
PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

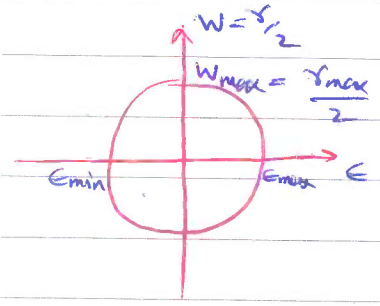
Subject:

Date: . . No:

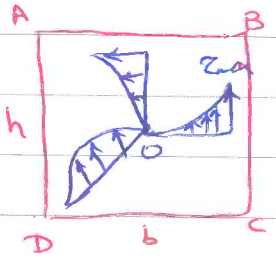
نکته 3 کرنش برشی حداکثر در حالت پیچش خالص برابر است با:



$$\tau_{max} = \frac{TR}{J} \Rightarrow \gamma_{max} = \frac{\tau_{max}}{G} = \frac{TR}{GJ}$$



$$W_{max} = \frac{\gamma_{max}}{2} = \frac{TR}{2GJ} \Rightarrow \boxed{\epsilon_{max} = W_{max} = \frac{TR}{2GJ}}$$



پیچش مقاطع مستطیلی 3

حداکثر تنش برشی در وسط ضلع بزرگتر (AD) رخ داده و مقدار آن به نسبت $\frac{h}{b}$ وابسته است. $(h > b)$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{C_1 b^2 h}}$$

$\boxed{C_1 = 1/3} \Leftarrow \infty = \frac{h}{b}$ if

ضلع کوچکتر

در این حالت تنش برشی در A، B، C و D صفر است و در مرکز مستطیل نیز تنش برشی صفر است.

در مربع $\longrightarrow$ $\frac{h}{b} = 1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0{,}2}$ و $\boxed{C_2 = 0{,}14}$

تغییر شکل پیچشی در مقاطع مستطیلی:

$$\boxed{J_e = C_2 b^3 h}$$

$\longrightarrow \boxed{\phi = \frac{TL}{GJ_e}}$

$\infty = h/b \rightarrow \boxed{C_2 = 1/3}$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

* به ازای مساحت یکسان τ_{max} مربع > τ_{max} دایره ← یعنی دایره مقاوم‌تره

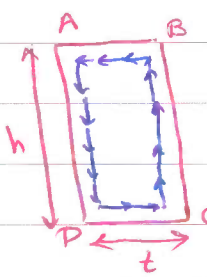
✓ به ازای مساحت‌های یکسان، هر مقطع مقدار محور تقارن بیشتری داشته باشد، لنگر پیچشی بهتری دارد.

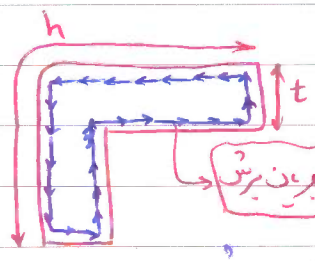
✓ در مقاطع بر حسب علاوه بر تنش‌های برشی، تنش‌های قائم نیز حاصل می‌شود. در حالت کلی جمع این تنش‌های قائم در مقطع معادل صفر خواهد بود زیرا بر مقطع نیروی محوری اثر نکرده است.

مقاطع جدار نازک:

پیچش در مقاطع جدار نازک باز: ← $\frac{\tau}{t}$ ثابت است

در جدار نازک → $\frac{h}{t} > 10$





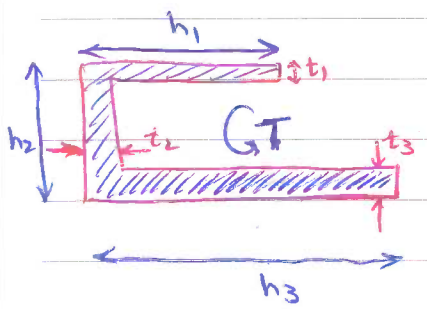
$\tau_{max} = \frac{3T}{t^2 h}$, $J_e = 1/3\, t^3 h$

جریان برش $= \tau \times t = q$

* تغییرات تنش در طول نازک‌ترین از ارتفاع h، صرف است.

* در صورتی که یک مقطع مستطیلی با $\frac{h}{t}$ زیاد داشته باشیم و طول خط مرکزی آن تغییر نکند، تنش برشی max و همان نیز پس مقطع تغییر نمی‌کند.

اگر در مقطع جدار نازک ضخامت‌ها متفاوت بود:



$$\tau_i = \frac{T t_i}{J_e}$$ ← یعنی تنش برشی در نقاط مختلف فقط به t بستگی دارد

$$J_e = 1/3 \sum_{i=1}^{n} t_i^3 h_i$$

لنگر پیچشی به نسبت GJ بین اعضا تقسیم می‌شود:

$$\boxed{T_i = \frac{J_i}{J_e} T = \frac{1/3\, t_i^3 h_i}{1/3 \sum t_i^3 h_i} T}$$

نکته مهم: در جدار نازک باز تنش برشی حداکثر ← در بیشترین ضخامت

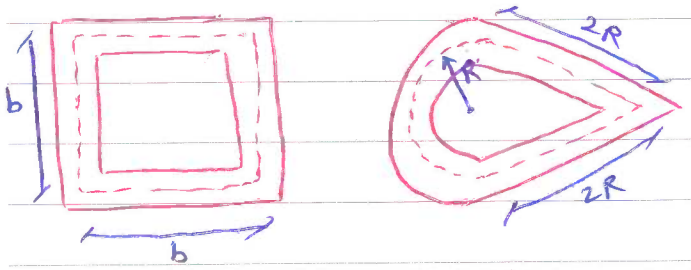
" " " بسته ← در کمترین ضخامت

PENIX NOTE BOOK
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: . . No:

پیچش در مقاطع جدار نازک بسته که τt ثابت است



(1) (2)

$$q = \tau \times t = Cte$$

$$\boxed{\tau = \frac{T}{2A_m t}} \Rightarrow \boxed{\text{جریان برش} = \frac{T}{2A_m}}$$

ضخامت نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش را در آن بدست آوریم.

$$(A_m)_1 = b^2 \qquad (A_m)_2 = \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2R)^2$$

که طول خط میانی‌ها است نه طول اضلاع

$$\boxed{J_e = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{ds}{t}}}$$

یعنی یک یک ضلع‌ها شکل رو به ضخامت هر ضلع تقسیم کنیم و با هم جمع کنیم.

در یک مقطع جدار نازک بسته، اگر ضخامت تمام ابعاد نصف شود

A_m و P تغییر نمی‌کند

همان اینرسی قطبی نصف می‌شود

در یک مقطع جدار نازک بسته اگر ضخامت ثابت و تمام ابعاد دو برابر شود

A_m 4 برابر می‌شود

محیط دو برابر می‌شود

J 8 برابر می‌شود

* اگر مقطعی پیوسته، از ترکیب مقاطع جدار نازک باز و بسته تشکیل شده باشد، زاویه دوران قسمت‌های مختلف آن با یکدیگر برابر است. در این حالت قسمت‌های مختلف مقطع مانند فنرهای موازی عمل کرده

و لنگر پیچشی به نسبت GJ بین آن‌ها توزیع می‌شود

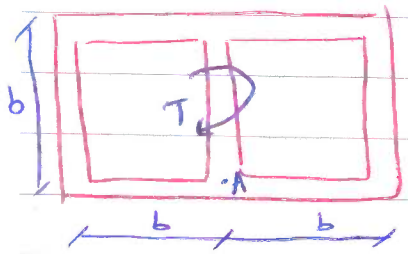
PENIX NOTE BOOK

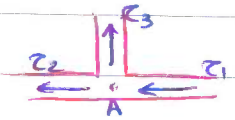
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

نکته: در مقاطع جدار نازک تحت پیچش، اصل پیوستگی جریان برش برقرار است.





$$\sum q_{in} = \sum q_{out}$$

تقارن

$$\tau_1 \times t = \tau_2 \times t + \tau_3 \times t \quad , \quad \tau_1 = \tau_2$$

$$\tau_3 \times t = 0 \Rightarrow \tau_3 = 0$$

بررسی شفت های انتقال توان:

$$P = T.\omega = T.2\pi f \quad \text{(توان)}$$

شفت ها و چرخ دنده ها:

1) ابتدا از شفتی که تحت گشتاور پیچشی قرار گرفته است شروع می کنیم و مقدار گشتاور پیچشی را در محل چرخدنده متصل به آن به دست می آوریم.

2) همین طوری با استفاده از نسبت r ها شفت های بعدی را حساب می کنیم

3) با به دست آمدن گشتاور پیچشی شفت آخر، می توان میزان پیچش آن را در محل اتصال به چرخدنده حساب کرد.

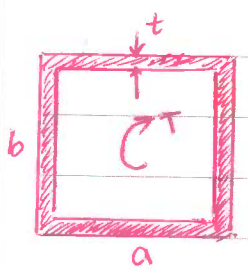
4) پس از محاسبه ی میزان پیچش شفت آخر، میزان پیچش شفت های دیگر با رابطه زیر حساب می شوند:

$$\boxed{\frac{T_2}{T_1} = \frac{r_2}{r_1}} \qquad \boxed{\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{r_1}{r_2}}$$

نکته مهم: اگر در سوالی نیروی برشی در یک وجه شکل را خواست کافیست جریان برش در وجه مورد نظر را در طول آن ضرب کنیم.

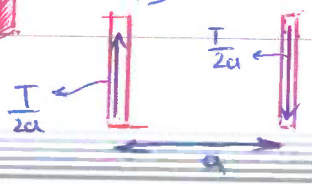
$$\boxed{F = q \times L} \qquad q = \tau t$$

یعنی نیروی برشی فقط و فقط طول موثر است و ضخامت تاثیری ندارد.



* اگر لنگر پیچشی تحمل شده توسط جداره های قائم مثلاً مقطع روبرو را خواست:

کافیست نیروی برشی ایجاد شده در وجه های قائم را در بازوی آن ها ضرب کنیم:



$$F_{قائم} = q \times b = b \times \frac{T}{2A_m} = \frac{T}{2a}$$

$$T_{قائم} = F \times a = \frac{T}{2a} \times a = \boxed{T/2}$$

PONIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject : Mostafa Rahimi

Year. Month. Date. ( )

نکات :

1. تحت اثر لنگر پیچشی، جهت تنش برشی در مقطع جدار نازک بسته تغییر نمی‌کند ولی در مقاطع جدار نازک باز جهت تنش برشی در ضخامت مقطع تغییر می‌کند.

2. در مقطع جدار نازک بسته ← $\tau \times t$ ← همواره در این برش ثابت است

" " " باز ← $\frac{\tau}{t}$ ثابت است

3. در جدار نازک باز ← تنش برشی حداکثر ← در بیشترین ضخامت

" " بسته ← " " " ← کمترین "

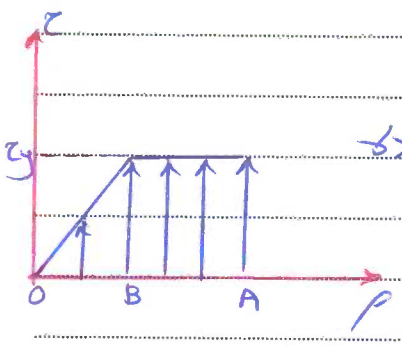
4. برای رسیدن به مقاومت پیچشی بیشتر جدار باز ← افزایش ضخامت

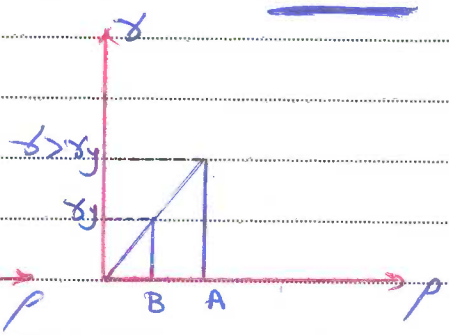
بسته ← افزایش ابعاد مقطع ($\uparrow A_m$)

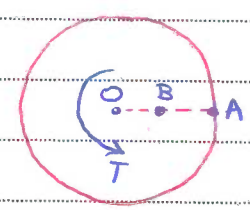
5. اگر قسمتی از یک مقطع جدار نازک باز و قسمتی دیگر از آن جدار نازک بسته بود، لنگر پیچشی بین آن‌ها به نسبت (GJ) توزیع می‌شود.

تفاوت بین کرنش برشی و تنش برشی :

تنش برشی با رفتار الاستوپلاستیک نمی‌تواند از τ_y بیشتر شود و اگر بیشتر شود نمودار آن غیرخطی می‌شود. اما کرنش برشی همواره خطی است حتی اگر γ از γ_y بیشتر شود.







$T > T_y$

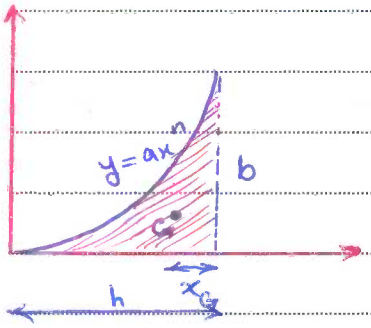
کرنش برشی $\boxed{\gamma = \frac{\phi}{L}\rho}$

PARDIS

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

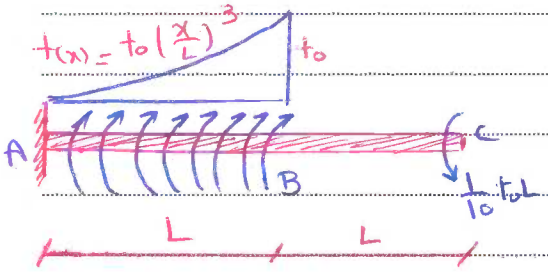
Subject :
Year. Month. Date. ( )

نکته مهم: بعضی اوقات بار پیچشی را به صورت منحنی $y=ax^n$ می‌دهند در این صورت داریم:

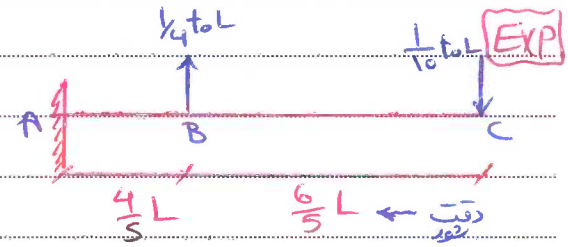


$$\boxed{S=\frac{1}{n+1}bh}$$ → مساحت زیر منحنی

$$\boxed{x_G=\frac{h}{n+2}}$$ → محل مرکز سطح



مدلسازی می‌کنیم



$$\Rightarrow \phi_C=\frac{\Sigma M_A}{GJ}=\frac{\frac{1}{4}t_0L\times\frac{4}{5}L-\frac{1}{10}t_0L\times 2L}{GJ}=0 \checkmark$$

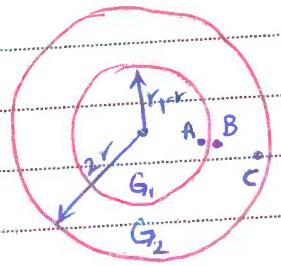
نکته مهم در حالت تشبیه به تیر پیچشی:

1. عکس العمل های تکیه گاهی در تیر معادل شده با لنگر پیچشی تکیه گاهی تیر AB برابر است
2. نمودار برش در تیر مدلسازی شده همان نمودار لنگر پیچشی داخلی در تیر AB است
3. نمودار $\frac{M}{GJ}$ در تیر مدلسازی شده همان نمودار زاویه پیچش تیر AB است
4. مشتق زاویه پیچش نسبت به x برابر $\frac{T}{GJ}$ است $\boxed{\frac{d\phi}{dx}=\frac{T}{GJ}}$
5. در محل تکیه گاه گیردار $\phi(x)$ برابر صفر است ولی $\frac{d\phi}{dx}$ برابر $\frac{T}{GJ}$ است
6. در محل صفر شدن لنگر پیچشی، $\frac{d\phi}{dx}$ برابر صفر است و زاویه پیچش ماکزیمم است ← نمودار برش (لنگر) شیب صفر است
7. سختی پیچشی فنر پیچشی ← $\boxed{\phi K_\phi=T}$

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject :
Year. Month. Date. ( )

پیچش در مقاطع غیرگرد دایروی :



1) کرنش برشی (γ) متناسب با فاصله از مرکز مقطع است و از جنس مقطع مستقل است یعنی

$$\begin{cases} \gamma_A = \gamma_B = \gamma \\ \gamma_C = 2\gamma \quad (r_2 = 2r_1 = 2r) \end{cases}$$

2) تنش برشی متناسب با حاصلضرب شعاع در مدول برشی می باشد.

$$\tau = \gamma G \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{r_A G_1}{r_B G_2}} \xrightarrow{r_A = r_B} \boxed{\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{G_1}{G_2}} \quad , \quad \boxed{\frac{\tau_A}{\tau_C} = \frac{G_1}{2G_2}}$$

3) حداکثر تنش برشی در دورترین فاصله از مرکز هر ماده رخ می دهد

$$\tau_{max} \propto rG \Rightarrow \boxed{\frac{\tau_{max_1}}{\tau_{max_2}} = \frac{r_A G_1}{r_C G_2}} = \frac{rG_1}{2rG_2} = \frac{G_1}{2G_2}$$

4) در این گونه سوالات، ابتدا ماده ای جاری می شود که تنش برشی حداکثر آن زودتر به تنش تسلیم می رسد. در کل هر ماده که نسبت $\frac{\tau_y}{RG}$ آن از همه کوچک تر بود زودتر تسلیم می شود

← فاصله دورترین نقطه هر یک از مصالح از مرکز مقطع

5) مقطع بهینه مقطعی ای است که تمام مصالح آن با هم جاری شوند یعنی نسبت $\frac{\tau_y}{RG}$ در تمام مصالح آن با هم یکسان باشد.

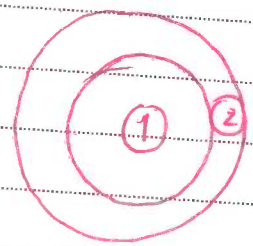
PARDIS

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject :
Year. Month. Date. ( )

محاسبه تنش برشی در مقاطع غیرهمگن دایروی :

$$n_i = \frac{G_i}{G_0} \qquad J_{eq} = \sum_{i=1}^{n} n_i J_i \qquad \tau_i = n_i \frac{T\rho}{J_{eq}}$$



$G_1 = 3G_2 = G \qquad \tau_{max} = ?$ EXP

$G_1 = 3G_2 \Rightarrow n_1 = 1 \qquad n_2 = 1/3$

$\Rightarrow J_{eq} = \sum_{i=1} n_i J_i = 1 \times \pi/2\, r^4 + 1/3 \times \left[\pi/2 (2r)^4 - \pi/2\, r^4\right]$

$\Longrightarrow \boxed{J_{eq} = 3\pi r^4}$

$\tau_{max} = n_1 \frac{T\rho_1}{J_{eq}} = 1 \times \frac{T \times r}{3\pi r^4} = \boxed{\frac{T}{3\pi r^3}}$

ماده (1) $\rightarrow G_1 r_1 = G \times r$

ماده (2) $\rightarrow G_2 r_2 = 1/3\, G \times 2r = \frac{2}{3} Gr$

پس تنش برشی حداکثر در ماده (1) رخ می‌دهد

نکته: در مقاطع دایره‌ای غیرهمگن کل گشتاور پیچشی به نسبت GJ یا $n_i J_i$ بین قسمت‌ها تقسیم می‌شود.

$$\boxed{T_1 = \frac{G_1 J_1}{G_1 J_1 + G_2 J_2} T = \frac{n_1 J_1}{n_1 J_1 + n_2 J_2} T = \frac{n_1 J_1}{J_{eq}} T}$$

نکته مهم: در مقطع حلقوی نازک بسته بیشترین مقاومت پیچشی و حداکثر سختی پیچشی را مقطع دایره‌ای نشان می‌دهد چون A_m در آن از همه مقاطع بیشتر است.

PARDIS

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

فصل هفتم: ترکیب تنش‌ها در اعضای سازه‌ای

Subject:
Date: No:

ابتدا به این نکته توجه کنیم:

تنش‌هایی که تنش نرمال ایجاد می‌کنند:

- تنش ناشی از نیروی محوری: $\sigma = \frac{P}{A}$
- تنش ناشی از خمش: $\sigma = \frac{Mc}{I}$

تنش‌هایی که تنش برشی ایجاد می‌کنند:

- تنش ناشی از پیچش: $\tau = \frac{Tc}{J}$
- تنش ناشی از برش: $\tau = \frac{VQ}{It}$

اگر در مسائل هر ۴ تنش یا یکی از یا چند تا از تنش‌های بالا را داشتیم هر کدام را به تفکیک در سند می‌نویسیم و تنش‌های نرمال را با هم و تنش‌های برشی را با هم جمع جبری می‌کنیم و در آخر برای به دست آوردن تنش max یا min برشی یا نرمال از فرمول‌های فصل اول کمک می‌گیریم.

EXP

$$\begin{cases} \tau = \frac{TR}{J} \\ \sigma = \frac{P}{A} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \end{cases}$$

دقت: اگر نیروی P در یک مقطع برون محوری داشت، دقت کنیم که حتماً جهت‌های M_x و M_y را درست تشخیص دهیم.

نکته: اگر نیروی محوری بر یک مقطع وارد شود، باید آن را به مرکز سطح منتقل کنیم و لنگشتاور خمشی ناشی از این انتقال را به دست آوریم.

اگر نیروی برشی بر مقطع اعمال شده باشد، آن را به مرکز برش منتقل کرده و لنگشتاور پیچشی ناشی از این انتقال را بر مقطع اعمال می‌کنیم.

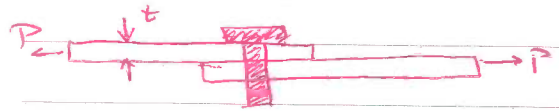
PONIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

فصل هشتم : اتصالات

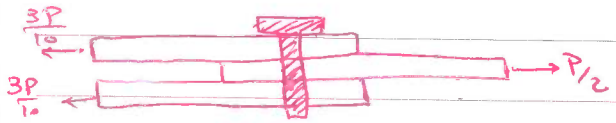
Subject:

Date: No:

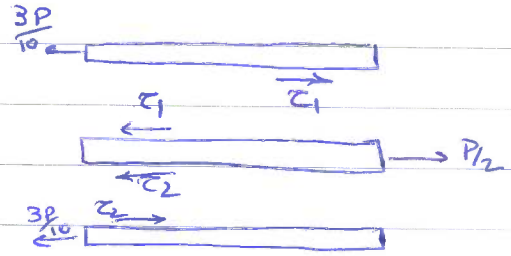


$$\Sigma F_{(x)} = 0 \Rightarrow \tau \times A_b = P \Rightarrow \boxed{\tau_{ave} = \frac{P}{A_b}}$$

سطح مقطع پیچ



$\Rightarrow$

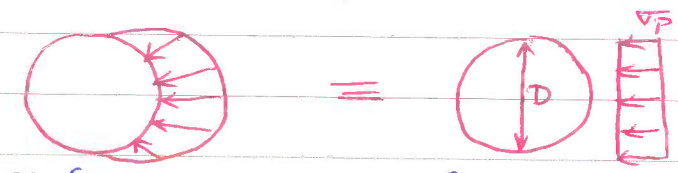


$$\frac{3P}{10} = \tau_1 \times A \Rightarrow \boxed{\tau_1 = \frac{3P}{10A}}$$

$$\tau_1 \times A + \tau_2 \times A = P/2 \Rightarrow \boxed{\tau_2 = \frac{2}{10}\frac{P}{A}}$$

تنش های لهیدگی در اتصالات پیچی :

برای سهولت کار در تنش های لهیدگی از فرض توزیع یکنواخت تنش های لهیدگی در پیچ استفاده شده



توزیع واقعی تنش های لهیدگی — توزیع فرضی تنش های لهیدگی

تنش برشی در پیچ — سطح مقطع پیچ

$$\boxed{\sigma_{P_1} = \frac{\tau \times A}{D \times t}}$$

تنش لهیدگی — تصویر سطح پیچ در صفحه تماس

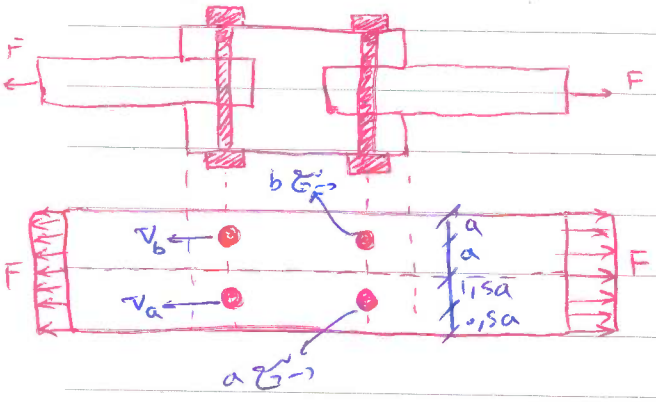
* اگر مانند شکل بالا سه ورق داشته در مقطع میانی به پیچ نیاز دارد می شود و باید در فرمول بالا به جای τ از $\tau_1 + \tau_2$ استفاده شود

PENIX NOTE BOOK
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

نکته: اگر مثلاً شکل روبرو را داشتیم، برای بدست آوردن نیروی هر پیچ باید اول یک نیروی پیچ کنار بگیریم و نیروهای پیچ ها را حساب کنیم.



$$\Sigma M_b = 0 \Rightarrow V_a \times 2,5a = F \times a$$

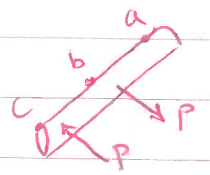
$$\Rightarrow \boxed{V_a = 0,4F}$$

$$\boxed{V_b = 0,6F}$$

$$(\tau_p)_a = \frac{V_a}{Dt} = \frac{0,4F}{Dt}$$ کمتری

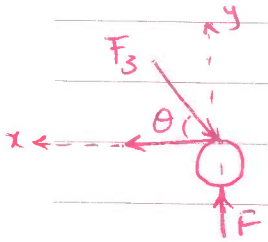
برش در اتصالات:

1) برش تحت برش ساده (منفرد):



$$\begin{cases} V_a = 0 \\ V_b = P \\ V_c = 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{P}{A} \leq \tau_{all}}$$

2) برش تحت برش مرکب (مضاعف):

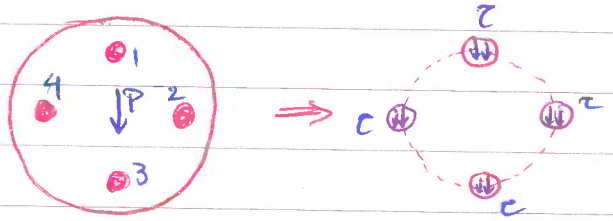


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_3 = \frac{F_1}{\sin\theta}$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_3 \cos\theta = F_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{F_1}{\sin\theta \times A} \leq \tau_{all}}$$

برش و مقطع در اتصالات پیچی:



وقتی نیروی برشی اثر می‌کند، تنش برشی ناشی از برش به تساوی مساحت های پیچ ها بین پیچ ها تقسیم می‌شود.

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = \frac{P}{4A}$$

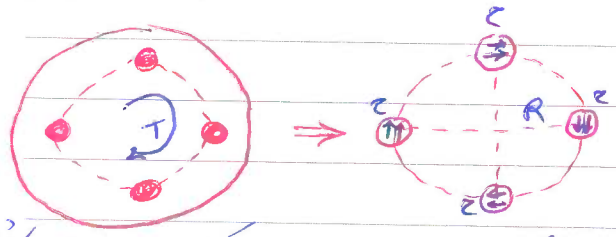
$$\tau = \frac{P}{4A}$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject:

Date: No:

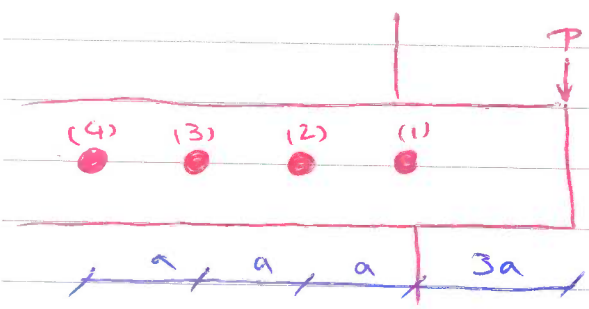


وقتی پیچش وارد می‌شود، تنش در هر پیچ متناسب با فاصله از مرکز است و نیروی برشی در هر پیچ متناسب با حاصلضرب فاصله از مرکز در مساحت مقطع هر پیچ می‌باشد.

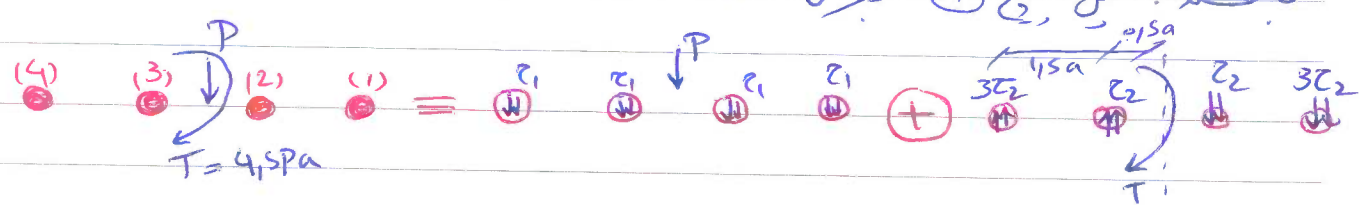
نیرو و تنش ایجاد شده در هر پیچ عمود بر خطی است که از مرکز سطح پیچ‌ها به مرکز پیچ متصل می‌شود.

$$\text{مهم} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{4} F_i R_i = T \\ F_i = \tau_i A \,,\ \tau_i = \tau \,,\ R_i = R \end{cases} \Rightarrow 4\tau A R = T \Rightarrow \boxed{\tau = \frac{T}{4AR}}$$

نکته: در شکل زیر دقت شود چون پیچش در ابتدا نیروی P را به مرکز گروه پیچ منتقل می‌کنیم



حال تنش برشی حداکثر در سمتی اتفاق می‌افتد که تنش ناشی از برش و پیچش با هم هم‌جهت باشند. پس پیچ (1) بحرانی است.



$$\begin{cases} \tau = \dfrac{P}{4A} \\ \sum \tau_i A_i R_i = T \Rightarrow 2(\tau_2 A) \times 0{,}5a + 2(3\tau_2 A) \times 1{,}5a = T \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_2 = 0{,}45 \frac{P}{A}}$$

PENIX NOTE BOOK

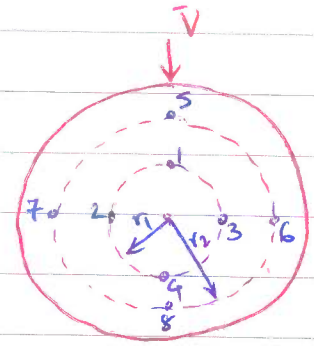
PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

Subject: Mostafa Rahimi

Date: . . No:

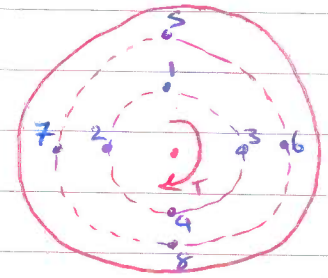
در مجموعه های مدول بیضی :

در مجموعه زیر مدول برشی پیچ های 1 و 2 و 3 و 4 برابر G_1 و مدول برشی پیچ های 5 و 6 و 7 و 8 برابر G_2 است . نیروی برشی و تنش برشی پیچ ها در این مجموعه متناسب است :



$F_i \propto G_i A_i$

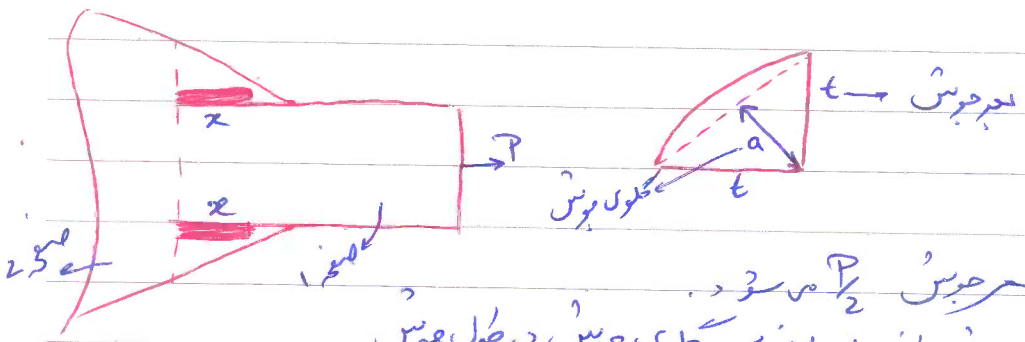
$\tau_i \propto G_i$



$F_i \propto r_i A_i G_i$

$\tau_i \propto r_i G_i$

اتصالات جوشی :



با توجه به تقارن ، نیروی هر جوش $\frac{P}{2}$ می شود .

برای محاسبه ی سطح موثر جوش از حاصلضرب گلوی جوش در طول جوش استفاده می شود .

گلوی جوش $\rightarrow$ $a = t\cos 45^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} \text{نیروی مجاز هر خط جوش} = \tau A = \tau \times a \times x = \tau \times t\cos 45^\circ \times x \\ \text{نیروی هر خط جوش} = \frac{1}{2}P \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x_{min} = \frac{P}{2\tau t\cos 45^\circ}}$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

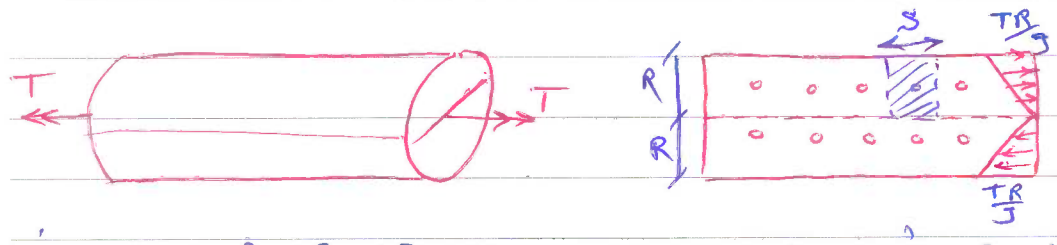
Subject:

Date: . . No:

اتصالات میخی :

جریان برش (q) را بدست می آوریم و در فاصله ی بین میخ ها ضرب می کنیم تا نیروی هر میخ بدست آید. حال مقدار نیرو را با $\tau_{all} \times A$ مقایسه می کنیم

اتصالات پیچی :



طبق قانون کوشی تنش های برشی در صفحه ی اتصال دو قطعه چوب با تنش های برشی در مقطع مرکزی برابر است. نیروی برشی که هر میخ در این حالت باید تحمل کند از حاصلضرب تنش برشی متوسط در سطح مؤثر میخ بدست می آید:

$$F = \frac{\tau_{max} + 0}{2} \times S \times R = \frac{TR}{2J} \times S \times R \Rightarrow \boxed{T_{max} = \frac{2\tau_{all} \times A \times J}{SR^2}}$$

نکته : اگر برای اتصال چوب از چسب استفاده شود :

$$\tau_{max} = \tau_{all} \Rightarrow \frac{TR}{J} = \tau_{all} \Rightarrow \boxed{T_{max} = \frac{\tau_{all} \times J}{R}}$$

نکته : اگر به جای چسب از میخ استفاده شود، برای مقاطع بدون نازک شدگی، میزان مصرف میخ برای لنگر پیچشی یکسان، در هر دو مقطع برابر است.

$$q \times S = \tau_{all} \times A \ , \ q = \frac{T}{2A_m} \rightsquigarrow \boxed{S_{min} = \frac{2 \times \tau_{all} \times A \times A_m}{T}}$$

PENIX NOTE BOOK

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor

لازم می دانم از جناب آقای مهندس غفاری بابت اسکن خلاصه این درس تشکر ویژه و صمیمانه داشته باشم

اگر این جزوه نقشی در موفقیت شما در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری داشت، لطفا ما را از دعای خیر خود بی نصیب نگذارید.

با تشکر

مصطفی رحیمی

nce.rahimi@yahoo.com

www.CivilFile.com سیویل فایل مرجع فایل های مهندسی عمران

PDF compression, OCR, web optimization using a watermarked evaluation copy of CVISION PDFCompressor